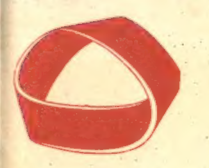


БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

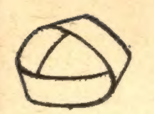
ВЫПУСК 17

И. Ф. ШАРЫГИН

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

ПЛАНИМЕТРИЯ





БИБЛИОТЕЧКА •КВАНТ•

ВЫПУСК 17

И. Ф. ШАРЫГИН

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

ПЛАНИМЕТРИЯ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.151.0
Ш 26
УДК 513.1/.2

Шарыгин И. Ф.

Ш 26 Задачи по геометрии (планиметрия). — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982, 160 с. — (Библиотечка «Квант». Вып. 17) — 30 коп.

Книга включает около 500 задач по планиметрии, разбитых на два раздела. В первом разделе 140 сравнительно простых задач, которые сопровождаются ответами и могут быть использованы как в классной, так и во внеклассной работе в школе.

Второй раздел включает около 300 задач, собранных по тематике: задачи на вычисление, задачи на доказательство и т. д., а также 62 дополнительные задачи. Задачи этого раздела сопровождаются указаниями и подробными решениями. Они могут быть использованы во внеклассной работе, в работе школьных математических кружков, при подготовке к математическим олимпиадам.

Для школьников, преподавателей, студентов.

Ш $\frac{1702040000-041}{053(02)-82}$ 198-81

ББК 22.151.0
513

Ш $\frac{1702040000-041}{053(02)-82}$ 198-81

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — сборник разнообразных задач по планиметрии. Первый раздел открывается набором геометрических фактов, примыкающих к курсу геометрии 6—8 классов средней школы. Многие из них входили в традиционные школьные учебники. Кроме того, в этом разделе собраны задачи (в основном «на вычисление» элементов геометрических фигур), призванные активизировать знание основных школьных формул и теорем, развить технику решения геометрических задач. Задачи этого раздела снабжены лишь ответами. Работа над ними поможет читателю подготовиться к школьным и конкурсным экзаменам (некоторые из этих задач в прошлом предлагались на экзаменах). В известной мере это утверждение можно отнести и к задачам «на вычисление» из второго раздела.

Уже в первом разделе встречаются нелегкие задачи. Во втором разделе, рассчитанном на увлеченного геометрией читателя, трудность задач возрастает (хотя и здесь каждый параграф открывается сравнительно простыми вводными задачами). Основными критериями отбора задач являлись: естественность формулировки, геометричность решения, неожиданность результата, оригинальность задачи.

Автор не делал попытки систематизировать задачи по типам и методам решения, по принадлежности к тому или иному разделу геометрической науки. По существу, почти каждая геометрическая задача (по сравнению с рутинными упражнениями на решение уравнений, неравенств, исследование функций и т. п.) нестандартна: в каждой надо придумать, какие сделать дополнительные построения, какими воспользоваться формулами и теоремами. Поэтому предлагаемую книгу никак нельзя рассматривать как задачник по систематическому курсу геометрии; скорее это сборник

различных геометрических находок, цель которого — демонстрация изящества элементарно-геометрических приемов доказательств и расчетов (без использования векторной алгебры и с минимальным привлечением метода координат, геометрических преобразований и, пожалуй, несколько бо́льшим — тригонометрии).

Сейчас в школьном курсе учеников знакомят с разнообразными понятиями и средствами решения задач, но именно их разнообразие оставляет мало времени на приобретение навыков, и вкус к такого рода задачам, которые собраны в этой книге, у новых поколений несколько снизился. Конечно, вопрос о том, насколько важно научиться решать трудные геометрические задачи, спорен. Быть может, и в самом деле тем, кто связывает свое будущее с профессией математика или программиста, полезнее заниматься задачами комбинаторно-логического характера, изучать начала анализа, научиться составлять программы для ЭВМ. Нам все же кажется, что развитое геометрическое воображение — качество, необходимое будущему математику и полезное будущим инженерам, физикам, строителям, архитекторам и многим другим.

Трудно гарантировать, что автору в каждом случае удалось найти «оптимальный» путь решения, не говоря уже о том, что некоторые (хотя, видимо, немногие) задачи знаток геометрии решил бы короче, используя инверсию, методы проективной геометрии и т. п. Автор намеренно не намечал все возможные связи и обобщения задач, как это принято у математиков-теоретиков, доискивающихся в каждом отдельном случае до логически наиболее прозрачного общего факта, а действовал скорее как физик-практик, которому надо решить конкретную задачу, по принципу: если не видно простого изящного решения, надо «посчитать». Возможно, некоторые читатели не откажут себе в удовольствии улучшить предложенный автором путь решения отдельных задач.

Хотя степень оригинальоости собранных в книге задач различна (некоторые можно найти в старых книгах и журналах, другие предлагались на олимпиадах или были опубликованы в журнале «Квант»), автор все же надеется, что кое-что из представленной здесь коллекции заинтересует и опытных любителей геометрии.

Заметим, что в некоторых случаях к задачам второго раздела дается лишь план решения или разбирается один из возможных случаев. Необходимость перебора разных возможных расположений фигур — нередко встречающийся недостаток элементарно-геометрических доказательств, который, как правило, исчезает при переходе к векторам, «направленным углам», методу координат и т. п.; правда, при этом зачастую исчезает и сама геометрия.

Чтобы сделать книгу понятной для читателей разной подготовки и разных поколений, была выбрана не совсем совпадающая с принятой сейчас в школе терминология. «Конгруэнтные» фигуры называются просто «равными», не используются знаки $\cong$, $[AB]$ для отрезка и (AB) для прямой и т. п.; надо полагать, что это не затруднит, а скорее облегчит пользование книгой.

Уже после того как рукопись была подготовлена, автору представилась возможность включить в нее еще 62 задачи повышенной трудности. Они помещены в конце книги вместе с ответами и указаниями.

В заключение автор считает своим долгом поблагодарить А. З. Берштейна, принимавшего участие в работе над первым разделом книги. Автор признателен также А. А. Ягубьянцу, сообщившему несколько изящных геометрических фактов.

Автор

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Доказать, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 1 : 2.

2. Доказать, что медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей.

3. Доказать, что диаметр окружности, описанной около треугольника, равен отношению его стороны к синусу противолежащего угла.

4. Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают окружность. Доказать, что величина угла измеряется полуразностью дуг, высекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла.

5. Пусть вершина угла находится внутри круга. Доказать, что величина угла измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла.

6. Пусть AB — хорда окружности, l — касательная к окружности (A — точка касания). Доказать, что каждый из двух углов между AB и l измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.

7. Через точку M, находящуюся на расстоянии a от центра окружности радиуса R $(a > R)$, проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B. Доказать, что $|MA| \cdot |MB|$ постоянно для всех секущих и равно $a^2 - R^2$ (квадрату длины касательной).

8. В окружности радиуса R через точку M, находящуюся на расстоянии a от ее центра $(a < R)$, проведена хорда AB. Доказать, что $|AM| \cdot |MB|$ постоянно для всех хорд и равно $R^2 - a^2$.

9. Пусть AM — биссектриса треугольника ABC. Доказать, что $\frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. То же верно для биссе-

ктрисы внешнего угла треугольника. (В этом случае M лежит на продолжении стороны BC.)

10. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

11. Стороны треугольника равны a, b и c. Доказать, что длина медианы m_a, проведенной к стороне a, вычисляется по формуле $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

12. Даны два треугольника, у которых одна вершина A — общая, а другие вершины расположены на двух прямых, проходящих через A. Доказать, что отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений двух сторон, содержащих вершину A.

13. Доказать, что площадь описанного многоугольника равна rp, где p — его полупериметр, r — радиус вписанной окружности (в частности, эта формула справедлива для треугольника).

14. Доказать, что площадь четырехугольника равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними.

15. Доказать справедливость следующих формул для площади треугольника: $S = \frac{a^2 \sin \hat{B} \sin \hat{C}}{2 \sin \hat{A}}$, $S = 2R^2 \sin \hat{A} \times \sin \hat{B} \sin \hat{C}$, где $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — углы треугольника, a — длина стороны против угла $\hat{A}$, R — радиус описанного круга.

16. Доказать, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

17. Доказать, что если a и b — две стороны треугольника, α — угол между ними и l — длина биссектрисы этого угла, то $l = \frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a+b}$.

18. Доказать, что расстояния от вершины A треугольника ABC до точек касания вписанной окружности со сторонами AB и AC равны $p-a$, где p — полупериметр $\triangle ABC$, $a = |BC|$.

19. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняется соотношение $|AB|+|CD| = |AD|+|BC|$, то существует окружность, касающаяся всех сторон его.

20. а) Доказать, что высоты в треугольнике пересекаются в одной точке.

б) Доказать, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны.

21. На одной стороне прямого угла с вершиной в точке O взяты две точки A и B, причем $|OA|=a$, $|OB|=b$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.

22. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а один из острых углов равен 30°. Найти радиус окружности с центром в вершине угла в 30°, делящей данный треугольник на две равновеликие части.

23. В прямоугольном треугольнике ABC даны длины катетов $|CB|=a$, $|CA|=b$. Найти расстояние от вершины C до ближайшей к C точки вписанной окружности.

24. В прямоугольном треугольнике медиана длины m делит прямой угол в отношении $1:2$. Найти площадь треугольника.

25. В треугольнике ABC даны стороны $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$. Найти отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B.

26. Доказать, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне.

27. Доказать, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника.

28. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|$) на основании AC взята точка M так, что $|AM|=a$, $|MC|=b$. В треугольники ABM и CBM вписаны окружности. Найти расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM.

29. В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

30. В ромб с высотой h и острым углом α вписана окружность. Найти радиус наибольшей из двух возможных окружностей, каждая из которых касается данной окружности и двух сторон ромба.

31. Определить острый угол ромба, в котором длина стороны есть среднее геометрическое длин диагоналей.

32. Длины диагоналей выпуклого четырехугольника равны a и b, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны между собой. Найти площадь четырехугольника.

33. Основание AD прямоугольника $ABCD$, в три раза большее его высоты AB, точками M и N разделено на три равные части. Найти $\widehat{AMB}+\widehat{ANB}+\widehat{ADB}$.

34. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Доказать, что $|AC|^2 \cdot |BD| = |AD|^2 \cdot |BC|$.

35. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

36. На окружности радиуса r выбраны три точки таким образом, что окружность оказалась разделенной на три дуги, длины которых относятся как $3:4:5$. В точках деления к окружности проведены касательные. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными.

37. Около окружности описана равнобочная трапеция с боковой стороной l, одно из оснований которой равно a. Найти площадь трапеции.

38. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найти площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2.

39. В трапеции $ABCD$ со сторонами $|AB|=a$, $|BC|=b$ проведена биссектриса угла A. Определить, что она пересекает: основание BC или боковую сторону CD.

40. Найти длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и проходящей через точку пересечения диагоналей, если основания трапеции равны a и b.

41. В равнобочной трапеции, описанной около окружности, отношение параллельных сторон равно k. Найти угол при основании.

42. В трапеции $ABCD$ основания $|AB|=a$ и $|CD|=b$. Найти площадь трапеции, если известно, что диагонали трапеции являются биссектрисами углов DAB и $АБС$.

43. В равнобочной трапеции средняя линия равна a, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

44. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S, а высота трапеции в 2 раза меньше ее боковой стороны. Определить радиус вписанного в трапецию круга.

45. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2. Найти площадь трапеции.

46. В треугольнике ABC угол ABC равен α. Найти угол AOC, где O — центр вписанной окружности.

47. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Найти расстояние между точками пересечения высот двух получившихся треугольников, если катеты данного треугольника равны a и b.

48. Прямая, перпендикулярная двум сторонам параллелограмма, делит его на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти острый угол параллелограмма, если длины его сторон равны a и b $(a<b)$.

49. Дан полукруг с диаметром AB. Через середину полуокружности проведены две прямые, делящие полукруг на три равновеликие части. В каком отношении эти прямые делят диаметр AB?

50. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна a, и построены две окружности. Первая окружность целиком расположена внутри квадрата $ABCD$, касается стороны AB в точке E, а также касается стороны BC и диагонали AC. Вторая окружность с центром в точке A проходит через точку E. Найти площадь общей части двух кругов, ограниченных этими окружностями.

51. Вершины правильного шестиугольника со стороной a являются центрами окружностей, радиусы которых равны $a/\sqrt{2}$. Найти площадь части шестиугольника, расположенной вне этих окружностей.

52. Вне окружности радиуса R взята точка A, из которой проведены две секущие, одна — проходящая через центр, а другая — на расстоянии $R/2$ от центра. Найти площадь части круга, расположенной между этими секущими.

53. В четырехугольнике $ABCD$ известны углы $\widehat{DAB}=90°$, $\widehat{DBC}=90°$, $|DB|=a$, $|DC|=b$. Найти расстояние между центрами двух окружностей, одна из которых проходит через точки D, A и B, а другая — через точки B, C и D.

54. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что прямые MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найти длину отрезка MN, если $|BD|=d$.

55. На стороне AB треугольника ABC взяты точки M и N так, что $|AM|:|MN|:|NB|=1:2:3$. Через точки M и N проведены прямые, параллельные стороне AC. Найти площадь части треугольника, заключенной между этими прямыми, если площадь треугольника ABC равна S.

56. Дана окружность и точка A вне ее. AB и AC — касательные к окружности (B и C — точки касания). Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

57. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность, и на дуге BC взята произвольная точка M. Доказать, что $|AM|=|BM|+|CM|$.

58. Пусть H — точка пересечения высот $\triangle ABC$. Найти углы $\triangle ABC$, если $\widehat{BAH}=\alpha$, $\widehat{ABH}=\beta$.

59. Площадь ромба S, сумма длин его диагоналей равна m. Найти сторону ромба.

60. Квадрат со стороной a вписан в окружность. Найти сторону квадрата, вписанного в один из полученных сегментов.

61. В сегмент с дугой в $120°$ и высотой h вписан прямоугольник $ABCD$ так, что $\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{1}{4}$ (BC лежит на хорде). Найти площадь прямоугольника.

62. Площадь кругового кольца S. Радиус большей окружности равен длине меньшей. Найти радиус меньшей окружности.

63. Сторону правильного десятиугольника выразить через R — радиус описанной окружности.

64. К окружности радиуса R из внешней точки M проведены касательные MA и MB, образующие угол α. Определить площадь фигуры, ограниченной касательными и меньшей дугой окружности.

65. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Найти радиус окружности, проходящей через середину стороны AB, центр квадрата и вершину C.

66. Дан ромб со стороной a и острым углом α. Найти радиус окружности, проходящей через две соседние вершины ромба и касающейся противоположной стороны ромба или ее продолжения.

67. Даны три попарно касающиеся окружности радиуса r. Найти площадь треугольника, образованного тремя прямыми, каждая из которых касается двух окружностей и не пересекает третью.

68. Окружность радиуса r касается некоторой прямой в точке M. На этой прямой по разные стороны от M взяты точки A и B так, что $|MA|=|MB|=a$. Найти радиус окружности, проходящей через A и B и касающейся данной окружности.

69. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. На стороне BC взята точка M так, что $|BM|=3|MC|$, а на стороне CD — точка N так, что $2|CN|=|ND|$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник AMN.

70. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Определить расстояние между серединой отрезка AM, где M — середина BC, и точкой N на стороне CD, делящей ее в отношении $|CN|:|ND|=3:1$.

71. В треугольнике ABC из вершины A выходит прямая, делящая пополам медиану BD (точка D лежит на стороне AC). В каком отношении эта прямая делит сторону BC?

72. В прямоугольном треугольнике ABC катет CA равен b, катет CB равен a, CH — высота, AM — медиана. Найти площадь треугольника BMH.

73. В равнобедренном треугольнике ABC заданы $\widehat{BAC}=\alpha>90°$ и $|BC|=a$. Найти расстояние между точкой пересечения высот и центром описанной окружности.

74. Вокруг треугольника ABC, в котором $|BC|=a$, $\widehat{CBA}=\alpha$, $\widehat{BCA}=\beta$, описана окружность. Биссектриса угла A пересекает окружность в точке K. Найти длину хорды AK.

75. В окружности радиуса R проведен диаметр и на нем взята точка A на расстоянии a от центра. Найти радиус второй окружности, которая касается диаметра в точке A и изнутри касается данной окружности.

76. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды равной длины. Каждая хорда разделена точками пересечения на три части равной длины. Найти радиус окружности, если длина каждой из хорд равна a.

77. Один правильный шестиугольник вписан в окружность, а другой описан около нее. Найти радиус окружности, если разность периметров этих шестиугольников равна a.

78. В правильном треугольнике ABC, сторона которого равна a, проведена высота BK. В треугольники ABK и BCK вписано по окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная, отличная от стороны AC. Найти площадь треугольника, отсекаемого этой касательной от треугольника ABC.

79. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны углы $\widehat{DAB}=\alpha$, $\widehat{ABC}=\beta$, $\widehat{BKC}=\gamma$, где K — точка пересечения диагоналей. Найти $\widehat{ACD}$.

80. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K, известно, что $|AB|=a$, $|BK|=b$, $|AK|=c$, $|CD|=d$. Найти длину диагонали AC.

81. Вокруг трапеции описана окружность. Основание трапеции составляет с боковой стороной угол α, а с диагональю — угол β. Найти отношение площади круга к площади трапеции.

82. В равнобочной трапеции $ABCD$ известны основания $|AD|=a$, $|BC|=b$ и боковая сторона $|AB|=d$. Через вершину B проведена прямая, делящая пополам диагональ AC и пересекающая AD в точке K. Найти площадь треугольника BDK.

83. Найти сумму квадратов расстояний от точки M, взятой на диаметре некоторой окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд, если радиус окружности равен R, а расстояние от M до центра окружности равно a.

84. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно a.

85. Дан правильный треугольник ABC. Точка K делит сторону AC в отношении $2:1$, а точка M делит сторону AB в отношении $1:2$ (считая в обоих случаях от вершины A). Доказать, что длина отрезка KM равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

86. Окружности радиусов R и $R/2$ касаются друг друга внешним образом. Один из концов отрезка

длины $2R$, образующего с линией центров угол, равный $30°$, совпадает с центром окружности меньшего радиуса. Какая часть отрезка лежит вне обеих окружностей? (Отрезок пересекает обе окружности.)

87. В треугольнике ABC проведены BK — медиана, BE — биссектриса, AD — высота. Найти длину стороны AC, если известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части и длина AB равна 4.

88. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около этого треугольника, равно k. Найти угол при основании треугольника.

89. Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

90. Найти площадь пятиугольника, ограниченного прямыми BC, CD, AN, AM и BD, где A, B и D — три вершины квадрата $ABCD$, N — середина стороны BC, M делит сторону CD в отношении $2:1$ (считая от вершины C), если сторона квадрата $ABCD$ равна a.

91. Длины сторон четырехугольника, описанного около окружности радиуса R, взятые последовательно, образуют геометрическую прогрессию. Найти площадь этого четырехугольника.

92. Дан квадрат со стороной a. Найти площадь правильного треугольника, одна вершина которого совпадает с серединой одной из сторон квадрата, а две другие расположены на диагоналях квадрата.

93. На сторонах квадрата $ABCD$ взяты точки M, N и K, где M — середина AB, N лежит на стороне BC, причем $2|BN| = |NC|$, K лежит на стороне DA, причем $2|DK| = |KA|$. Найти синус угла между прямыми MC и NK.

94. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r, пересекающая сторону BC в точке D. Найти радиус окружности, проходящей через точки A, D и C, если $|AB| = c$, $|AC| = b$.

95. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найти длину стороны AC.

96. В окружность радиуса R вписан правильный шестиугольник $ABCDEK$. Найти радиус круга, вписанного в треугольник ACD.

97. Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности?

98. В прямоугольном треугольнике меньший угол равен α. Перпендикулярно гипотенузе проведена прямая, делящая треугольник на две равновеликие части. Определить, в каком отношении эта прямая делит гипотенузу.

99. Внутри правильного треугольника со стороной 1 помещены две касающиеся друг друга окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника (каждая сторона треугольника касается хотя бы одной окружности). Доказать, что сумма радиусов этих окружностей не меньше, чем $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$.

100. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом $\hat{A}=30°$ проведена биссектриса BD другого острого угла. Найти расстояние между центрами двух окружностей, вписанных в треугольники ABD и DBC, если длина меньшего катета равна 1.

101. В трапеции $ABCD$ углы $\hat{A}$ и $\hat{D}$ при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $|BN|:|NC|=2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найти отношение $|AM|:|MD|$.

102. В треугольнике ABC заданы $|BC|=a$, $\hat{A}=\alpha$, $\hat{B}=\beta$. Найти радиус окружности, касающейся стороны AC в точке A и касающейся стороны BC.

103. В треугольнике ABC известны стороны $|AB|=c$, $|BC|=a$ и угол $\widehat{ABC}=\beta$. На стороне AB взята точка M так, что $2|AM|=3|MB|$. Найти расстояние от M до середины стороны AC.

104. На стороне AB треугольника ABC взята точка M, а на стороне AC — точка N, причем $|AM|=3|MB|$, а $2|AN|=|NC|$. Найти площадь четырехугольника $MBCN$, если площадь треугольника ABC равна S.

105. Даны две концентрические окружности радиусов R и r $(R>r)$ с общим центром O. Третья окружность касается их обеих. Найти тангенс угла между касательными к третьей окружности, выходящими из точки O.

106. В параллелограмме $ABCD$ известны $|AB|=a$, $|AD|=b$ $(b>a)$, $\hat{A}=\alpha$ $(\alpha<90°)$. На сторонах AD и BC взяты точки K и M так, что $BKDM$ — ромб. Найти сторону ромба.

107. В прямоугольном треугольнике ABC известна гипотенуза $|AB|=c$. Центры трех окружностей радиуса $R=\frac{c}{5}$ находятся в вершинах A, B и C. Найти радиус четвертой окружности, которая касается трех данных и не содержит их внутри себя.

108. Найти радиус окружности, которая высекает на обеих сторонах угла величины α хорды длины a, если известно, что расстояние между ближайшими концами этих хорд равно b.

109. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N. Найти площадь треугольника AMN, если площадь треугольника ABC равна S, а $\widehat{BAC}=\alpha$.

110. В окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные равные хорды MN и PQ. Найти расстояние между точками M и P, если $|NQ|=a$.

111. В треугольнике ABC на наибольшей стороне $|AC|=b$ выбирается точка M. Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и BCM.

112. В параллелограмме $ABCD$ известны $|AB|=a$, $|BC|=b$, $\widehat{ABC}=\alpha$. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

113. В треугольнике ABC известны $\widehat{BAC}=\alpha$, $|BA|=a$, $|AC|=b$. На сторонах AC и AB взяты точки M и N, где M — середина AC. Найти длину отрезка MN, если известно, что площадь треугольника AMN составляет 1/3 площади треугольника ABC.

27 114. Найти углы ромба, если площадь вписанного в него круга вдвое меньше площади ромба.

115. Найти площадь общей части двух квадратов, если у каждого сторона равна a и один получается из другого поворотом вокруг вершины на угол 45°.

116. Во вписанном в круг четырехугольнике две противоположные стороны взаимно перпендикулярны, одна из них равна a, прилежащий к ней острый угол делится диагональю на части α и β. Определить диагонали (угол α прилежит к данной стороне).

117. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом $\widehat{DAB}=\alpha$ и сторонами $|AB|=a$, $|AD|=b$ $(a<b)$. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на AD, а M — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на продолжение стороны CD. Найти площадь треугольника BKM.

118. В треугольнике ABC из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найти отношение длин отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника, если $|BC|:|AC|=3$, $\widehat{ACB}=\alpha$.

119. В равнобедренном треугольнике ABC $(|AB|=|BC|)$ проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны соответственно S_1 и S_2. Найти $|AC|$.

120. Окружность радиуса R_1 вписана в угол величины α. Другая окружность, радиуса R_2, касается одной стороны угла в той же точке, что и первая, и пересекает вторую сторону угла в точках A и B. Найти длину отрезка AB.

121. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $|OA|=15$, $|AB|=5$. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OAB. Найти площадь треугольника ABC, если C — точка пересечения этих касательных.

122. В треугольнике ABC известны $|BC|=a$, $\widehat{BAC}=\alpha$, $\widehat{CBA}=\beta$. Найти радиус окружности, пересекающей все его стороны и высекающей на каждой из них хорды длины d.

123. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом 60°. Найти диагонали четырехугольника.

124. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка M таким образом, что расстояние от вершины B до центра тяжести треугольника AMC равно расстоянию от вершины C до центра тяжести треугольника AMB. Доказать, что $|BM|=|DC|$, где D — основание высоты, опущенной на BC из вершины A.

125. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $|BO|:|OE|=\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Найти острые углы треугольника.

126. На отрезке AB длины R как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, как и первая, имеет центр в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найти радиус третьей окружности.

127. Дан треугольник ABC. Известно, что $|AB|=4$, $|AC|=2$, $|BC|=3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найти длину отрезка KM.

128. Окружность с центром, расположенным внутри прямого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D. Длина хорды AB равна $\sqrt{6}$, длина хорды CD равна $\sqrt{7}$. Найти радиус окружности.

129. В параллелограмме лежат две окружности радиуса 1, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.

130. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найти площадь треугольника ABC, зная, что $\widehat{ABC}=\beta$ и $\widehat{CAB}=\alpha$.

131. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол ABC равен $120°$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

132. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $|AB|=3$ и $|BC|=4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся стороны BC. Найти

длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

133. Дан отрезок длины a. Три окружности радиуса R ($a<4R$) имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найти радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

134. Найти угол между общей внешней касательной и общей внутренней касательной к двум окружностям, если их радиусы равны R и r, а расстояние между их центрами равно $\sqrt{2(R^2+r^2)}$ (центры окружностей находятся по одну сторону от общей внешней касательной и по разные стороны от общей внутренней касательной).

135. Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и E соответственно. Найти угол CBD, если площади треугольников DCE и ABC относятся, как 1:4.

136. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен 120°. Точки E и F лежат на сторонах BC и AD соответственно, отрезок EF и диагональ ромба AC пересекаются в точке M. Площади четырехугольников $BEFA$ и $ECDF$ относятся, как 1 : 2. Найти длину отрезка EM, если $|AM| : |MC| = 1 : 3$.

137. Дана окружность радиуса R с центром в точке O. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная к окружности AK. Величина угла OAK равна 60°. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

138. В круг вписан равнобедренный треугольник, в котором $|AB| = |BC|$ и $\widehat{ABC} = \beta$. Средняя линия треугольника продолжена до пересечения с окружностью в точках D и E ($DE \parallel AC$). Найти отношение площадей треугольников ABC и DBE.

139. Дан угол величины α с вершиной O. На одной его стороне взята точка M и восставлен перпендикуляр в этой точке до пересечения с другой стороной в точке N. Точно так же в точке K на другой стороне восставлен перпендикуляр до пересечения с первой стороной в точке P. Пусть B — точка пересечения прямых MN и KP, а A — точка пересечения прямых OB и NP. Найти длину отрезка OA, если $|OM| = a$, $|OP| = b$.

140. а) Доказать, что поворот вокруг точки O на угол α эквивалентен последовательному применению двух осевых симметрий, оси которых проходят через точку O, а угол между осями $\alpha/2$, параллельный же перенос эквивалентен двум осевым симметриям с параллельными осями.

б) Доказать, что два последовательных поворота вокруг точки O_1 на угол α и вокруг точки O_2 на угол β ($0 \leqslant \alpha < 2\pi$, $0 \leqslant \beta < 2\pi$, повороты делаются в одном направлении), если $\alpha + \beta \neq 2\pi$, эквивалентны одному повороту на угол $\alpha + \beta$ вокруг некоторой точки O. Найти углы треугольника O_1O_2O.

141. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a. Доказать, что четыре точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности. Найти радиус этой окружности.

142. Доказать, что отрезок общей внешней касательной к двум окружностям, заключенный между общими внутренними касательными, равен длине общей внутренней касательной.

143. В круге с центром O проведены две взаимно перпендикулярные хорды OA и OB. C — точка на дуге AB такая, что $\widehat{AOC} = 60°$ ($\widehat{BOC} = 30°$). Окружность с центром в A и радиусом $|AB|$ пересекает продолжение OC за точку C в точке D. Доказать, что $|CD|$ равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность.

Возьмем теперь точку M, диаметрально противоположную точке C. Отрезок MD, увеличенный на $\frac{1}{5}$ своей длины, принимается приближенно равным полуокружности. Оценить ошибку этого приближенного равенства.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

§ 1. Задачи на вычисление

1. В треугольнике ABC проведена медиана AD. $\widehat{DAC}+\widehat{ABC}=90^\circ$. Найти $\widehat{BAC}$, если известно, что $|AB|=|AC|$.

2. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найти радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

3. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, сторона которого лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если известно, что центры тяжести треугольника и квадрата совпадают.

4. В равностороннем треугольнике ABC сторона равна a. На стороне BC лежит точка D, а на AB — точка E так, что $|BD|=\frac{1}{3}a$, $|AE|=|DE|$. Найти длину CE.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL, $|CL|=a$, и медиана CM, $|CM|=b$. Найти площадь треугольника ABC.

6. В трапецию вписана окружность. Найти площадь трапеции, если известны длины a одного из оснований и отрезков b и d, на которые разделена точкой касания одна из боковых сторон (отрезок b примыкает к данному основанию).

7. В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.

8. В треугольнике ABC известны длины сторон: $|AB|=12$, $|BC|=13$, $|CA|=15$. На стороне AC взята точка M таким образом, что радиусы окружностей,

вписанных в треугольники ABM и BCM, равны. Найти отношение $|AM|:|MC|$.

9. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник ABC, в котором $\cos \widehat{ABC}=0{,}8$. Эта окружность касается средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC. Найти длину стороны AC.

10. Дан правильный треугольник ABC площади S. Параллельно его сторонам на равном расстоянии от них проведены три прямые, пересекающиеся внутри треугольника и образующие в пересечении треугольник $A_1B_1C_1$ площади Q. Найти расстояние между параллельными сторонами треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

11. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и являются диаметрами двух равных касающихся окружностей радиуса r. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если $\frac{|BC|}{|AD|}=k$.

12. В угол, величина которого α, вписаны две касающиеся друг друга окружности. Определить отношение радиуса меньшей окружности к радиусу третьей окружности, касающейся первых двух и одной из сторон угла.

13. В треугольнике ABC на средней линии DE, параллельной AB, как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найти MN, если $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$.

14. В треугольнике ABC дана разность внутренних углов $\hat{A}-\hat{B}=\varphi$. Известно, что высота, опущенная из вершины C на сторону AB, равна разности $|BC|-|AC|$. Найти углы треугольника ABC.

15. Найти площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, равны R и r.

16. Дан угол величины α с вершиной в A и точка B на расстоянии a и b от сторон угла. Найти длину AB.

17. Даны длины h_a и h_b высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и B, и длина l биссектрисы угла C. Найти угол $\hat{C}$.

18. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность того же радиуса касается катетов этого треугольника, причем одной из точек касания является вершина треугольника. Найти отношение площади треугольника к площади общей части двух данных кругов.

19. Окружности радиусов R и r касаются друг друга внутренним образом. Найти сторону правильного треугольника, одна вершина которого совпадает с точкой касания, а две другие лежат на разных данных окружностях.

20. Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая линия, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти $|BC|$, если $|AB|=a$.

21. Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ имеют внутреннее касание в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая линия, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти $|BC|$, если $|AB|=a$.

22. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, угол между ними равен α. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ABM, BCM, CDM, DAM. Определить отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $O_1O_2O_3O_4$.

23. В параллелограмме площади S проведены биссектрисы его внутренних углов. Площадь четырехугольника, получившегося при их пересечении, равна Q. Найти отношение длин сторон параллелограмма.

24. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки AN и BM пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников OMA, OAB и OBM соответственно равны S_1, S_2, S_3.

25. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника лежит на окружности, вписанной в этот треугольник. Найти острые углы треугольника.

26. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найти отношение сторон $|BC|:|CA|:|AB|$.

27. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает прямую AC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину AC, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что $|MN|=|BC|$ и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Определить углы треугольника ABC.

28. Площадь трапеции $ABCD$ равна S, отношение оснований $|AD|:|BC|=3$; на прямой, пересекающей

продолжение основания AD за точку D, расположен отрезок EF так, что $AE \parallel DF$, $BE \parallel CF$ и $|AE| : |DF| = |CF| : |BE| = 2$. Определить площадь треугольника EFD.

29. Сторона BC треугольника ABC равна a, радиус вписанного круга r. Найти площадь треугольника, если вписанный круг касается окружности, построенной на BC как на диаметре.

30. Дан правильный треугольник ABC со стороной a, BD — его высота. На BD построен второй правильный треугольник BDC_1 и на высоте BD_1 этого треугольника — третий правильный треугольник BD_1C_2. Найти радиус окружности, описанной около треугольника CC_1C_2. Доказать, что ее центр находится на стороне треугольника ABC (C_2 находится вне треугольника ABC).

31. Стороны параллелограмма равны a и $b (a \neq b)$. Через вершины тупых углов этого параллелограмма проведены прямые, перпендикулярные сторонам. Эти прямые при пересечении образуют параллелограмм, подобный исходному. Найти косинус острого угла данного параллелограмма.

32. В треугольнике KLM проведены биссектрисы KN и LP, пересекающиеся в точке Q. Отрезок PN имеет длину 1, а вершина M лежит на окружности, проходящей через точки N, P, Q. Найти стороны и углы треугольника PNQ.

33. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ находится центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, AD и BC. На диагонали BD находится центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон BC, CD и AD. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

34. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найти длину стороны AC.

35. В треугольнике ABC взяты точки M, N и P: M и N — на сторонах AC и BC, P — на отрезке MN, причем

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|CN|}{|NB|} = \frac{|MP|}{|PN|}.$$

Найти площадь треугольника ABC, если площади треугольников AMP и BNP равны T и Q.

36. Дана окружность радиуса R и точка A на расстоянии a от ее центра ($a>R$). Пусть K — ближайшая к A точка окружности. Секущая, проходящая через A, пересекает окружность в точках M и N. Найти длину отрезка $|MN|$, если площадь треугольника KMN равна S.

37. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|$) через конец E биссектрисы AE проведен перпендикуляр к AE до пересечения с продолжением стороны AC в точке F (C — между A и F). Известно, что $|AC|=2m$, $|FC|=m/4$. Найти площадь треугольника ABC.

38. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C и угол $\widehat{BCD}$ меньше, чем $\pi/3$. Точка K — середина AC, точка L — середина CE, точка M — середина BD. Площадь треугольника KLM равна $\sqrt{3}/5$. Найти длину отрезка BD.

39. Из точки K, расположенной вне окружности с центром O, проведены к этой окружности две касательные KM и KN (M и N — точки касания). На хорде MN взята точка C ($|MC|<|CN|$). Через точку C перпендикулярно к отрезку OC проведена прямая, пересекающая отрезок NK в точке B. Известно, что радиус окружности равен R, $\widehat{MKN}=\alpha$, $|MC|=b$. Найти $|CB|$.

40. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Точки M, Q, N и P являются основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины E соответственно на стороны AB, BC, CD (или их продолжения) и диагональ AD. Известно, что $|EP|=d$, а отношение площади треугольника MQE к площади треугольника PNE равно k. Найти $|EM|$.

41. Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d ($d>c$).

42. На боковых сторонах KL и MN равнобочной трапеции $KLMN$ выбраны соответственно точки P и Q так, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $KPQN$ и $PLMQ$

можно вписать окружность и радиусы этих окружностей равны R и r соответственно. Определить основания $|LM|$ и $|KN|$.

43. В треугольнике ABC, все стороны которого различны, биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $|AB|-|BD|=a$, $|AC|+$ $+|CD|=b$. Найти $|AD|$.

44. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что квадрат длины биссектрисы треугольника равен произведению длин сторон, ее заключающих, минус произведение отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

45. Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в A пересекает первую окружность в точках C и D и диаметр в точке E. На дуге CE, не содержащей точки D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N. Известно, что $|CN|=a$, $|DN|=b$. Найти $|MN|$.

46. В треугольнике ABC угол $\hat{B}$ равен $\pi/4$, угол $\hat{C}$ равен $\pi/6$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D. Найти отношение $|BC|:|DC|$.

47. Пусть AB — диаметр окружности, O — ее центр, $|AB|=2R$, C — точка на окружности, M — точка на AC. Из M опущен перпендикуляр MN на AB и восставлен перпендикуляр к AC, пересекающий окружность в точке L (отрезок CL пересекает AB). Найти расстояния между серединой AO и серединой CL, если $|AN|=a$.

48. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AN на биссектрисы внешних по отношению к B и C углов треугольника. Доказать, что длина отрезка MN равна полупериметру треугольника ABC.

49. Три окружности проходят через две данные точки плоскости каждая. Пусть O_1, O_2, O_3 — их центры. Прямая, проходящая через одну из точек, общую всем трем окружностям, вторично пересекает их соответственно в точках A_1, A_2, A_3. Доказать, что $\frac{|A_1A_2|}{|A_2A_3|}=$ $=\frac{|O_1O_2|}{|O_2O_3|}$.

50. Дан треугольник ABC. Касательная к окружности, описанной около этого треугольника, в точке B пересекает прямую AC в точке M. Найти отношение $|AM|:|MC|$, если $|AB|:|BC|=k$.

51. На прямой последовательно расположены точки A, B, C и D, причем $|AC|=\alpha|AB|$, $|AD|=\beta|AB|$. Через A и B проведена произвольная окружность, CM и DN — две касательные к этой окружности (M и N — точки на окружности, лежащие по разные стороны от прямой AB). В каком отношении прямая MN делит отрезок AB?

52. $ABCD$ — описанный четырехугольник, длины отрезков от A до точек касания равны a, длины отрезков от C до точек касания равны b. В каком отношении диагональ AC делится диагональю BD?

53. Точка K лежит на основании AD трапеции $ABCD$, причем $|AK|=\lambda|AD|$. Найти отношение $|AM|:|AD|$, где M — точка пересечения с AD прямой, проходящей через точки пересечения прямых AB и CD и прямых BK и AC.

Беря $\lambda=1/n$, $n=1, 2, 3, \ldots$, получить способ деления данного отрезка на n равных частей с помощью одной линейки, если дана прямая, ему параллельная.

54. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $|AB|=c$ на высоте треугольника CD как на диаметре построена окружность. Касательные к этой окружности, проходящие через точки A и B, касаются ее в точках M и N и пересекаются при продолжении в точке K. Найти $|MK|$.

55. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 так, что $|AC_1|:|C_1B|=$ $=|BA_1|:|A_1C|=|CB_1|:|B_1A|=k$. На сторонах A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 взяты точки A_2, B_2 и C_2 так, что $|A_1C_2|:|C_2B_1|=|B_1A_2|:|A_2C_1|=|C_1B_2|:|B_2A_1|=1/k$. Доказать, что $\triangle A_2B_2C_2$ подобен $\triangle A_1B_1C_1$, и найти коэффициент подобия.

56. В треугольнике ABC даны R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения биссектрис треугольника ABC с описанной окружностью. Найти отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

57. Имеются два треугольника с соответственно параллельными сторонами и площадями S_1 и S_2, причем один из них вписан в треугольник ABC, а другой

около него описан. Найти площадь треугольника ABC.

58. Определить величину угла $\hat{A}$ треугольника ABC, если известно, что биссектриса этого угла перпендикулярна прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности этого треугольника.

59. Найти углы треугольника, если известно, что расстояние между центром описанного круга и точкой пересечения высот вдвое меньше наибольшей стороны и равно наименьшей стороне.

60. Дан $\triangle ABC$. На луче BA возьмем точку D так, что $|BD|=|BA|+|AC|$. Пусть K и M — две точки на лучах BA и BC соответственно таких, что площадь $\triangle BDM$ равна площади $\triangle BCK$. Найти $\widehat{BKM}$, если $\widehat{BAC}=\alpha$.

61. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна AD и BC, причем $|AB|=\sqrt{|AD|\cdot|BC|}$. Пусть E — точка пересечения непараллельных сторон трапеции, O — точка пересечения диагоналей, M — середина AB. Найти $\widehat{EOM}$.

62. На плоскости даны две прямые, пересекающиеся в точке O, и две точки A и B. Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из A на данные прямые, через M и N, а основания перпендикуляров, опущенных из B, — через K и L. Найти угол между прямыми MN и KL, если $\widehat{AOB}=\alpha\leqslant 90°$.

63. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Из центра большей окружности проведен радиус OB, касающийся меньшей в точке C. Найти $\widehat{BAC}$.

64. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $\widehat{MAB}=60°$, $\widehat{MCD}=15°$. Найти $\widehat{MBC}$.

65. В треугольнике ABC с углом $\widehat{ABC}=60°$ биссектриса угла A пересекает BC в точке M. На стороне AC взята точка K так, что $\widehat{AMK}=30°$. Найти $\widehat{OKC}$, где O — центр окружности, описанной около треугольника AMC.

66. Дан треугольник ABC, причем $|AB|=|AC|$, $\widehat{BAC}=80°$. Внутри треугольника взята точка M такая, что $\widehat{MBC}=30°$, $\widehat{MCB}=10°$. Найти $\widehat{AMC}$.

67. В треугольнике ABC даны $\widehat{ABC}=100°$, $\widehat{ACB}=65°$. На AB взята точка M так, что $\widehat{MCB}=55°$, а на AC — точка N так, что $\widehat{NBC}=80°$. Найти $\widehat{NMC}$.

68. В треугольнике ABC дано $|AB|=|BC|$, $\widehat{ABC}=20°$; на AB взята точка M так, что $\widehat{MCA}=60°$; на стороне CB — точка N так, что $\widehat{NAC}=50°$. Найти $\widehat{NMA}$.

69. В треугольнике ABC даны $\widehat{ABC}=70°$, $\widehat{ACB}=50°$. На AB взята точка M так, что $\widehat{MCB}=40°$, а на AC — точка N так, что $\widehat{NBC}=50°$. Найти $\widehat{NMC}$.

70. Пусть M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC, K — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой MN. Доказать, что $\widehat{AKC}=90°$.

71. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$, в котором $|AB|=|BC|$, $|CD|=|DE|$, $|EF|=|FA|$, известны $\hat{B}=\alpha$, $\hat{D}=\beta$, $\hat{F}=\gamma$. Определить углы треугольника BDF, если $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

72. Пусть P и Q — такие две различные точки окружности, описанной около треугольника ABC, что $|PA|^2=|PB|\cdot|PC|$, $|QA|^2=|QB|\cdot|QC|$ (одна из точек — на дуге $\breve{AB}$, другая — на дуге $\breve{AC}$). Найти разность $\widehat{PAB}-\widehat{QAC}$, если разность углов $\hat{B}$ и $\hat{C}$ треугольника ABC равна α.

73. На данной окружности взяты две фиксированные точки A и B, $\breve{AB}=\alpha$. Произвольная окружность проходит через точки A и B. Через A также проведена произвольная прямая l, вторично пересекающая окружности в точках C и D (C — на данной окружности). Касательные к окружностям в точках C и D (C и D — точки касания) пересекаются в точке M; N — точка на l такая, что $|CN|=|AD|$, $|DN|=|CA|$. Какие значения может принимать $\widehat{CMN}$?

74. Доказать, что если в треугольнике один угол равен 120°, то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, — прямоугольный.

75. В четырехугольнике $ABCD$ дано $\widehat{DAB}=150°$, $\widehat{DAC}+\widehat{ABD}=120°$, $\widehat{DBC}-\widehat{ABD}=60°$. Найти $\widehat{BDC}$.

76. На стороне CB треугольника ABC взята точка D такая, что $|CD| = \alpha\ |AC|$. Радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен R. Найти расстояние между центром окружности, описанной около $\triangle ABC$, и центром окружности, описанной около $\triangle ADB$.

77. Около прямоугольного треугольника ABC ($\widehat{C} = 90°$) описана окружность. Пусть CD — высота треугольника. Окружность с центром в D проходит через середину дуги $\widetilde{AB}$ и пересекает AB в точке M. Найти $|CM|$, если $|AB| = c$.

78. Найти периметр треугольника ABC, если $|BC| = a$ и отрезок прямой, касательной к вписанному кругу и параллельной BC, заключенный внутри треугольника, равен b.

79. В треугольнике проведены три прямые, параллельные его сторонам и касающиеся вписанной окружности. Они отсекают от данного три треугольника. Радиусы окружностей, описанных около них, равны R_1, R_2, R_3. Найти радиус окружности, описанной около данного треугольника.

80. В окружности радиуса R проведены две хорды AB и AC. На AB или на ее продолжении взята точка M, расстояние от которой до прямой AC равно $|AC|$. Аналогично, на AC или на продолжении взята точка N, расстояние от которой до прямой AB равно $|AB|$. Найти $|MN|$.

81. Дана окружность радиуса R с центром O. Две другие окружности касаются данной изнутри и пересекаются в точках A и B. Найти сумму радиусов двух последних окружностей, если известно, что $\widehat{OAB} = 90°$.

82. В круге радиуса R проведены две пересекающиеся перпендикулярные между собой хорды.

а) Найти сумму квадратов четырех отрезков этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения.

б) Найти сумму квадратов длин хорд, если расстояние от центра круга до их точки пересечения равно d.

83. Даны две концентрические окружности радиусов r и R ($r < R$). Через некоторую точку P меньшей окружности проведена прямая, пересекающая бо́льшую окружность в точках B и C. Перпендикуляр

к BC в точке P пересекает меньшую окружность в точке A. Найти $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$.

84. В полукруге из концов диаметра проведены две пересекающиеся хорды. Доказать, что сумма произведений отрезка каждой хорды, примыкающего к диаметру, на всю хорду равна квадрату диаметра.

85. Пусть a, b, c и d — длины сторон вписанного четырехугольника (a и c — противоположные стороны), h_a, h_b, h_c и h_d — расстояния от центра описанного круга до соответствующих сторон. Доказать, что если центр круга — внутри четырехугольника, то $ah_c+ch_a=bh_d+dh_b$.

86. Противоположные стороны четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках P и Q. Найти длину отрезка $|PQ|$, если касательные к окружности, проведенные из P и Q, равны a и b.

87. В окружность радиуса R вписан четырехугольник. Пусть P, Q и M — соответственно точки пересечения диагоналей этого четырехугольника и продолжений противоположных сторон. Найти стороны треугольника PQM, если расстояния от P, Q и M до центра окружности равны a, b и c.

88. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Точка касания окружности со стороной AB делит эту сторону на отрезки a и b, а точка касания окружности со стороной AD делит ее на отрезки a и c. В каких пределах может меняться радиус окружности?

89. Окружность радиуса r касается изнутри окружности радиуса R. A — точка касания. Прямая, перпендикулярная линии центров, пересекает одну окружность в точке B, другую — в точке C. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

90. Две окружности радиусов R и r пересекаются, A — одна из точек пересечения. BC — общая касательная (B и C — точки касания). Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

91. В четырехугольнике $ABCD$ даны $|AB|=a$, $|AD|=b$; стороны BC, CD и AD касаются некоторой окружности, центр которой находится в середине AB. Найти сторону $|BC|$.

92. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ даны $|AB|=a$, $|AD|=b$, $a>b$. Найти сторону $|BC|$, если известно, что BC, CD и AD касаются некоторой окружности, центр которой находится на AB.

93. Дан равнобедренный треугольник ABC, $|AB| = |BC|$, AD — биссектриса. Перпендикуляр, восставленный к AD в точке D, пересекает продолжение AC в точке E; основания перпендикуляров, опущенных из B и D на AC, — M и N. Найти $|MN|$, если $|AE| = a$.

94. Из точки A под углом α выходят два луча. На одном луче взяты две точки B и B_1, а на другом — C и C_1. Найти длину общей хорды окружностей, описанных около треугольников ABC и AB_1C_1, если $|AB| - |AC| = |AB_1| - |AC_1| = a$.

95. Пусть O — центр окружности, C — точка на окружности, M — середина OC. A и B — точки на окружности такие, что $\widehat{AMO} = \widehat{BMC}$; A и B лежат по одну сторону от прямой OC. Найти $|AB|$, если $|AM| - |BM| = a$.

96. A, B и C — три точки на одной прямой. На AB, BC и AC как на диаметрах построены три полукруга по одну сторону от прямой. Центр окружности, касающейся всех трех полукругов, находится на расстоянии d от прямой AC. Найти радиус этой окружности.

97. В окружности радиуса R дана хорда AB. Пусть M — произвольная точка окружности. На луче MA отложим отрезок MN, $|MN| = R$, а на луче MB — отрезок MK, равный расстоянию от M до точки пересечения высот треугольника MAB. Найти $|NK|$, если меньшая из дуг, стягиваемых AB, равна 2α.

98. Высота, опущенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника на гипотенузу, делит треугольник на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Определить углы и площадь треугольника, образованного катетами исходного треугольника и прямой, проходящей через центры окружностей, если высота исходного треугольника равна h.

99. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h. Доказать, что вершины острых углов треугольника и проекции основания высоты на катеты лежат на одной окружности. Определить длину хорды, высекаемой на прямой, содержащей высоту, этой окружностью, и отрезки хорды, на которые она делится гипотенузой.

100. Окружность радиуса R касается прямой l в точке A, AB — диаметр этой окружности, BC — произвольная хорда. Пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из C на AB. Точка E лежит на

продолжении CD за точку D, причем $|ED|=|BC|$. Касательные к окружности, проходящие через E, пересекают прямую в точках K и N. Найти длину отрезка $|KN|$.

101. Через центр правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, проведена прямая. Найти сумму квадратов расстояний до этой прямой от вершин n-угольника.

102. Найти сумму квадратов расстояний от точек касания вписанной в данный треугольник окружности с его сторонами до центра описанной, если радиус вписанной окружности равен r, радиус описанной R.

103. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на его стороны, являются вершинами четырехугольника, в который можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности, если известны радиус данной окружности R, расстояние от ее центра до точки пересечения диагоналей d, а диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны.

104. Диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны. Доказать, что середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных на стороны из точки пересечения диагоналей, лежат на одной окружности. Найти радиус этой окружности, если радиус данной окружности R, а расстояние от ее центра до точки пересечения диагоналей четырехугольников d.

105. Доказать, что если четырехугольник вписан в окружность радиуса R, одновременно описан около окружности радиуса r, причем расстояние между центрами этих окружностей равно d, то выполняется соотношение

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}.$$

При этом существует бесконечно много четырехугольников, одновременно вписанных в бóльшую окружность и описанных около меньшей окружности. (В качестве одной из вершин можно взять любую точку большей окружности.)

106. а) К данной окружности проведены две касательные. Пусть A и B — точки касания, а C — точка пересечения касательных. Проведем произвольную пря-

мую l, касающуюся данной окружности, не проходящую через A и B. Пусть u и v — расстояния до l от A и B, w — расстояние до l от C. Найти $\frac{uv}{w^2}$, если $\widehat{ACB}=\alpha$.

б) Вокруг окружности описан многоугольник. Пусть l — произвольная прямая, касающаяся окружности и не совпадающая ни с одной из сторон многоугольника. Доказать, что отношение произведения расстояний от вершин многоугольника до l к произведению расстояний от точек касания сторон многоугольника с окружностью до l не зависит от положения прямой l.

в) Пусть $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ — описанный около окружности $2n$-угольник, l — произвольная касательная к окружности. Доказать, что произведение расстояний до l от вершин с нечетными номерами и произведение расстояний до l от вершин с четными номерами находятся в постоянном отношении, не зависящем от l (предполагается, что l не содержит вершин многоугольника).

107. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ даны $|AB|=a$, $|AD|=b$, $|BC|=p-a$, $|DC|=p-b$. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Обозначим через α угол $\widehat{BAC}$. К чему стремится длина AO, если α стремится к нулю?

§ 2. Задачи на доказательство

108. Доказать, что если одна сторона треугольника лежит на фиксированной прямой плоскости, а точка пересечения высот совпадает с фиксированной точкой, то окружность, описанная около этого треугольника, также проходит через фиксированную точку.

109. Доказать, что описанный многоугольник, все стороны которого равны, является правильным, если число сторон нечетно.

110. В треугольнике ABC проведена высота BD, AN — перпендикуляр к AB, CM — перпендикуляр к BC, причем $|AN|=|DC|$, $|CM|=|AD|$. Доказать, что M и N равноудалены от вершины B.

111. Дан четырехугольник $ABCD$. На прямых AC и BD взяты точки K и M так, что BK параллельна AD, AM параллельна BC. Доказать, что KM параллельна CD.

112. В $\triangle ABC$ проведена биссектриса внутреннего угла AD. Построим касательную l к описанному кругу

в точке A. Доказать, что прямая, проведенная через D параллельно l, касается вписанной окружности.

113. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N так, что $|MN| = |AM| + |BM|$. Доказать, что все такие прямые касаются одной и той же окружности.

114. Доказать, что точки, симметричные центру описанного около треугольника круга относительно середин его медиан, лежат на высотах треугольника.

115. Доказать, что если высота треугольника в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса описанного круга, то прямая, соединяющая основания перпендикуляров, опущенных из основания этой высоты на стороны, ее заключающие, проходит через центр описанного круга.

116. Пусть ABC — прямоугольный треугольник ($\hat{C} = 90°$), CD — высота, K — точка плоскости, для которой $|AK| = |AC|$. Доказать, что диаметр окружности, описанной около $\triangle ABK$, проходящий через вершину A, перпендикулярен прямой DK.

117. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая параллельно BC, на этой прямой взята точка D так, что $|AD| = |AC| + |BA|$; отрезок DB пересекает сторону AC в точке E. Доказать, что прямая, проведенная через E параллельно BC, проходит через центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

118. Две окружности проходят через вершину угла и точку, лежащую на биссектрисе. Доказать, что отрезки сторон угла, заключенные между окружностями, равны.

119. Пусть E — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC. Через вершину B проведем произвольную прямую l. Прямая, проходящая через E параллельно BC, пересекает l в точке N, а прямая, параллельная AB, — в точке M. Доказать, что AN параллельна CM.

120. На противоположных сторонах BC и DA выпуклого четырехугольника взяты точки M и N так, что

$$\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{|AN|}{|ND|} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Доказать, что прямая MN параллельна биссектрисе угла, образованного сторонами AB и CD.

121. Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на четыре треугольника. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны. Доказать, что данный четырехугольник — ромб.

122. Диагонали четырехугольника разбивают его на четыре треугольника равного периметра. Доказать, что данный четырехугольник — ромб.

123. О четырехугольнике $ABCD$ известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA, DAB, равны между собой. Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.

124. Дан прямоугольный треугольник ABC, угол C — прямой, O — центр вписанной окружности, M — точка касания вписанной окружности с гипотенузой, окружность с центром в M, проходящая через O, пересекается с биссектрисами углов A и B в точках K и L, отличных от O. Доказать, что K и L — центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, где CD — высота треугольника ABC.

125. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BCDE$, $ACFG$, $BAHK$. Пусть $FCDQ$ и $EBKP$ — параллелограммы. Доказать, что треугольник APQ — равнобедренный прямоугольный.

126. $ABCD$ — прямоугольник, E — точка на BC, F — на DC, E_1 — середина AE, F_1 — середина AF. Доказать, что если ΔAEF правильный, то и треугольники DE_1C и BF_1C также правильные.

127. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA, DAB, а H_1, H_2, H_3, H_4 — точки пересечения высот тех же треугольников. Доказать, что $O_1O_2O_3O_4$ — прямоугольник, а четырехугольник $H_1H_2H_3H_4$ равен четырехугольнику $ABCD$.

128. Дан треугольник ABC, D — произвольная точка плоскости. Доказать, что точки пересечения высот треугольников ABD, BCD, CAD являются вершинами треугольника, равновеликого данному.

129. Две окружности пересекаются в точках A и B. Произвольная прямая проходит через B и вторично пересекает первую окружность в C, вторую — в D. Касательные к первой окружности в C, а ко второй в D пересекаются в точке M. Через точку пересечения AM и CD проходит прямая, параллельная CM,

пересекающая AC в точке K. Доказать, что KB касается второй окружности.

130. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника во внешнюю сторону построены квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Доказать, что четырехугольник, ограниченный катетами и прямыми LB и NA, равновелик треугольнику, образованному прямыми LB, NA и гипотенузой AB.

131. Стороны выпуклого четырехугольника разделены на $(2n+1)$ равных частей каждая. Соответствующие точки деления противоположных сторон соединены друг с другом. Доказать, что площадь центрального четырехугольника составляет $1/(2n+1)^2$ часть площади всего четырехугольника.

132. Прямая, проходящая через середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и DC в точках M и N. Доказать, что $S_{DCM}=S_{ANB}$.

133. В параллелограмме $ABCD$ вершины A, B, C и D соединены с серединами сторон CD, AD, AB и BC. Доказать, что площадь четырехугольника, образованного этими прямыми, составляет 1/5 площади параллелограмма.

134. Доказать, что площадь восьмиугольника, образованного прямыми, соединяющими вершины параллелограмма с серединами противоположных сторон, равна 1/6 площади параллелограмма.

135. На сторонах AC и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены два параллелограмма $ACDE$ и $BCFG$. Продолжения DE и FD пересекаются в точке H. На стороне AB построен параллелограмм $ABML$, стороны AL и BM которого равны и параллельны HC. Доказать, что параллелограмм $ABML$ равновелик сумме параллелограммов, построенных на AC и BC.

136. Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые разделили трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Доказать, что сумма площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции, равна площади пятиугольника.

137. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, E лежит на прямой AB, F — на прямой AD (B — на отрезке AE,

D — на отрезке AF), K — точка пересечения прямых ED и FB. Доказать, что четырехугольники $ABKD$ и $CEKF$ равновелики.

138. Дан треугольник ABC. На лучах AB и CB откладываются отрезки $|AK|=|CM|=|AC|$. Доказать, что радиус окружности, описанной около $\triangle BKM$, равен расстоянию между центрами вписанной и описанной окружностей $\triangle ABC$, а прямая KM перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

139. Через вершину треугольника проведена прямая, перпендикулярная прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей. Доказать, что эта прямая со сторонами данного треугольника образует два треугольника, для которых разность радиусов описанных окружностей равна расстоянию между центрами вписанной и описанной окружностей исходного треугольника.

140. Пусть P, Q и M — соответственно точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника и продолжений его противоположных сторон. Доказать, что точка пересечения высот треугольника PQM совпадает с центром окружности, описанной около данного четырехугольника (*Брокар*).

141. Доказать, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то: а) окружности, вписанные в два треугольника, на которые данный четырехугольник разбивается диагональю, касаются друг друга; б) точки касания этих окружностей со сторонами четырехугольника являются вершинами вписанного четырехугольника.

142. Доказать, что если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники BCD и BDA.

143. ABC — равнобедренный треугольник ($|AB|=|BC|$), BD — его высота. Круг радиуса BD катится по прямой AC. Доказать, что, пока вершина B находится внутри круга, дуга окружности, расположенная внутри треугольника, имеет постоянную длину.

144. По двум пересекающимся прямым с равными скоростями движутся две точки. Доказать, что найдется такая фиксированная точка плоскости, которая во все моменты времени от них равноудалена.

145. Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной точки, где пересекаются окружности и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Доказать, что существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов все время одинаковы, если они едут: а) в одном направлении (по часовой стрелке); б) в разных направлениях.

146. Доказать, что если из произвольной точки окружности опустить перпендикуляры на стороны вписанного $2n$-угольника, то произведения длин этих перпендикуляров через один будут равны.

147. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — вписанный многоугольник; центр окружности находится внутри многоугольника. Система окружностей касается данной изнутри в точках A_1, A_2, ..., A_n, причем одна из точек пересечения двух соседних окружностей лежит на соответствующей стороне многоугольника. Доказать, что если n нечетно, то все окружности имеют равные радиусы. Длина внешней границы объединения вписанных окружностей равна длине данной окружности.

148. Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то:

а) радиус вписанного круга равен 1/3 высоты, опущенной на среднюю сторону;

б) прямая, соединяющая центр тяжести треугольника с центром вписанного круга, параллельна средней стороне;

в) биссектриса внутреннего угла, противолежащего средней стороне, перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанного и описанного кругов;

г) для всех точек этой биссектрисы сумма расстояний до сторон треугольника постоянна;

д) центр вписанной окружности, середины наибольшей и наименьшей сторон и вершина угла, ими образованного, лежат на одной окружности.

149. Теорема Бретшнейдера (теорема косинусов для четырехугольника). Пусть a, b, c, d — последовательные длины сторон четырехугольника, m и n — длины его диагоналей, $\hat{A}$ и $\hat{C}$ — величины двух противоположных углов. Тогда выполняется соотношение

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\hat{A} + \hat{C}).$$

150. Теорема Птолемея. Пусть a, b, c, d — последовательные длины сторон вписанного четырехугольника, а m и n — длины его диагоналей. Доказать, что $mn = ac + bd$.

151. Доказать, что если ABC — правильный треугольник, M — произвольная точка плоскости, не лежащая на окружности, описанной около ABC, то существует треугольник, длины сторон которого равны $|MA|$, $|MB|$ и $|MC|$ (теорема Помпею). Найдите угол этого треугольника, лежащий против стороны, равной $|MB|$, если $\widehat{AMC} = \alpha$.

152. Рассмотрим окружность, в которую вписан правильный $(2n+1)$-угольник $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$. Пусть A — произвольная точка дуги A_1A_{2n+1}.

а) Доказать, что сумма расстояний от A до вершин с четными номерами равна сумме расстояний от A до вершин с нечетными номерами.

б) Построим равные окружности, касающиеся данной одинаковым образом в точках A_1, A_2, ..., A_{2n+1}. Доказать, что сумма длин касательных, проведенных из A к окружностям, касающимся данной в вершинах с четными номерами, равна сумме длин касательных, проведенных к окружностям, касающимся данной в вершинах с нечетными номерами.

153. Теорема Лейбница. Пусть M — произвольная точка плоскости, G — центр тяжести треугольника ABC. Тогда выполняется равенство

$$3|MG|^2 = |MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 - \frac{1}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

154. Пусть ABC — правильный треугольник со стороной a, M — некоторая точка плоскости, находящаяся на расстоянии d от центра треугольника ABC. Доказать, что площадь треугольника, стороны которого равны отрезкам $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$, выражается формулой $S = \frac{\sqrt{3}}{12}|a^2 - 3d^2|$.

155. Продолжения сторон AB и DC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, а продолжения сторон AD и BC — в точке L, причем отрезки BL и DK пересекаются. Доказать, что если выполняется одно из трех соотношений $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, $|BK| + |BL| = |DK| + |DL|$, $|AK| + |CL| = |AL| + |CK|$, то выполняются и два других.

156. Продолжения сторон AB и DC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, а продолжения сторон AD и BC — в точке L, причем отрезки BL и DK пересекаются. Доказать, что если выполняется одно из трех соотношений $|AD|+|DC|=|AB|+|CB|$, $|AK|+|CK|=|AL|+|CL|$, $|BK|+|DK|=|BL|+|DL|$, то выполняются и два других.

157. Пусть S — площадь данного треугольника, R — радиус описанного около него круга. Пусть, далее, S' — площадь треугольника, образованного основаниями перпендикуляров, опущенных на стороны данного треугольника из точки, удаленной от центра описанного круга на расстояние d. Доказать, что

$$S'=\frac{S}{4}\left|1-\frac{d^2}{R^2}\right| \quad \textit{(Эйлер)}.$$

158. Дан произвольный треугольник ABC. На его сторонах как на основаниях вне его построены три равнобедренных треугольника AKB, BLC, CMA с углами при вершинах K, L и M, равными α, β и γ, $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$. Такие же равнобедренные треугольники AK_1B, BL_1C, CM_1A построены внутрь треугольника ABC. Доказать, что углы каждого из треугольников KLM и $K_1L_1M_1$ равны $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$.

159. На сторонах четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Доказать, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны по длине и взаимно перпендикулярны.

160. Дан произвольный треугольник. На его сторонах вовне построены равносторонние треугольники, центры которых служат вершинами треугольника Δ. Центры равносторонних треугольников, построенных на сторонах исходного внутрь его, служат вершинами другого треугольника δ. Доказать, что:

а) треугольники Δ и δ равносторонние;

б) центры треугольников Δ и δ совпадают с центром тяжести исходного;

в) разность площадей треугольников Δ и δ равна площади исходного.

161. Дан произвольный треугольник ABC. На прямой, проходящей через вершину A и перпендикулярной стороне BC, взяты две точки A_1 и A_2 так, что $|AA_1|=|AA_2|=|BC|$ (A_1 ближе к прямой BC, чем A_2).

Аналогично, на прямой, перпендикулярной AC и проходящей через B, взяты точки B_1 и B_2 так, что $|BB_1| = |BB_1| = |AC|$. Доказать, что отрезки A_1B_2 и A_2B_1 равны по длине и взаимно перпендикулярны.

162. Доказать, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков высот от вершин до точки их пересечения лежат на одной окружности — «окружности девяти точек» (*Эйлер*).

163. Пусть H — точка пересечения высот треугольника, D — середина какой-либо стороны, K — одна из точек пересечения прямой HD с описанной окружностью (D — между H и K). Доказать, что D — середина отрезка HK.

164. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника, E — основание какой-либо высоты, F — одна из точек пересечения прямой ME с описанной окружностью (M — между E и F). Доказать, что $|FM| = 2|EM|$.

В задачах 165 — 168 a, b и c обозначают длины сторон треугольника, p — полупериметр, R — радиус описанного круга, r — радиус вписанного круга.

165. Доказать следующее соотношение:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

166. Доказать, что квадрат расстояния между центром тяжести и центром описанного круга треугольника равен $R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

167. Доказать, что квадрат расстояния между центром тяжести треугольника и центром вписанного круга равен $\frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$.

168. Пусть d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника. Доказать, что

$$d^2 = R^2 - 2Rr \quad (\textit{Эйлер}).$$

169. Доказать, что окружность девяти точек (см. задачу 162) касается вписанной в треугольник окружности (*Фейербах*).

§ 3. Геометрические места точек. Принадлежность точек прямым и окружностям

170. Даны две точки A и B. Доказать, что множество точек M таких, что $|AM|^2 - |MB|^2 = k$ (где k — данное число), есть прямая, перпендикулярная AB.

171. Пусть расстояния от некоторой точки M до вершин A, B и C треугольника ABC выражаются числами a, b и c. Доказать, что ни при каком $d \neq 0$ ни для одной точки плоскости расстояния до вершин в том же порядке не могут выражаться числами $\sqrt{a^2+d}$, $\sqrt{b^2+d}$, $\sqrt{c^2+d}$.

172. Доказать, что для того, чтобы перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, CA и AB треугольника ABC, пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$|A_1B|^2 - |BC_1|^2 + |C_1A|^2 - |AB_1|^2 + |B_1C|^2 - |CA_1|^2 = 0.$$

173. Доказать, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C на прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, также пересекаются в одной точке.

174. Дан четырехугольник $ABCD$. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения высот треугольников BCD, ACD и ABD. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из A, B и C на прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

175. Даны две точки A и B. Доказать, что множество точек M таких, что $k|AM|^2 + l|BM|^2 = d$ (k, l, d — данные числа, $k+l \neq 0$), есть или окружность с центром на прямой AB, или точка, или пустое множество.

176. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — фиксированные точки, k_1, k_2, $\ldots$, k_n — данные числа. Тогда множеством точек M таких, что сумма $k_1|A_1M|^2 + k_2|A_2M|^2 + \ldots + k_n|A_nM|^2$ постоянна, будет:

а) окружность, точка или пустое множество, если $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$;

б) прямая или вся плоскость, если $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0$.

177. Даны окружность и точка A вне ее. Пусть окружность, проходящая через A, касается данной в произвольной точке B, а касательные к ней, проведенные через точки A и B, пересекаются в точке M. Найти множество точек M.

178. Даны две точки A и B. Найти множество точек M таких, что $\frac{|AM|}{|MB|} = k \neq 1$.

179. Три точки A, B и C расположены на одной прямой (B — между A и C). Возьмем произвольную

окружность с центром в B и обозначим через M точку пересечения касательных, проведенных из A и C к этой окружности. Найти множество точек M таких, что точки касания AM и CM с окружностью лежат внутри отрезков AM и CM.

180. Даны две окружности. Найти множество таких точек M, что отношение длин касательных, проведенных из M к данным окружностям, равно постоянной величине k.

181. Пусть прямая пересекает одну окружность в точках A и B, а другую — в точках C и D. Доказать, что точки пересечения касательных к первой окружности, проведенных в точках A и B, с касательными, проведенными ко второй окружности в точках C и D (рассматриваются точки, в которых пересекаются касательные к разным окружностям), лежат на одной окружности, центр которой лежит на прямой, проходящей через центры данных окружностей.

182. Возьмем три окружности, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Доказать, что перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в точках касания этих окружностей, пересекаются в одной точке.

183. Дан треугольник ABC. Рассмотрим всевозможные пары точек M_1 и M_2 таких, что $|AM_1|:|BM_1|:|CM_1|=|AM_2|:|BM_2|:|CM_2|$. Доказать, что все прямые M_1M_2 проходят через фиксированную точку плоскости.

184. Расстояния от точки M до вершин A, B и C треугольника равны соответственно 1, 2 и 3, а от точки M_1 — 3, $\sqrt{15}$, 5. Доказать, что прямая MM_1 проходит через центр круга, описанного около треугольника.

185. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из вершин A, B и C треугольника ABC на прямую l. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из A_1, B_1, C_1 соответственно на BC, CA и AB, пересекаются в одной точке.

186. Дан правильный треугольник ABC и произвольная точка D; A_1, B_1 и C_1 — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, ACD и ABD. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из вершин A, B и C на B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

187. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Доказать, что три общие хорды этих окружностей проходят через одну точку.

188. На прямых AB и AC взяты точки M и N соответственно. Доказать, что общая хорда двух окружностей с диаметрами CM и BN проходит через точку пересечения высот $\triangle ABC$.

189. На плоскости дана окружность и точка N. Пусть AB — произвольная хорда окружности. Обозначим через M точку пересечения прямой AB и касательной в точке N к окружности, описанной около $\triangle ABN$. Найти множество точек M.

190. Внутри окружности взята точка A. Найти множество точек пересечения касательных, проведенных к окружности в концах всевозможных хорд, проходящих через точку A.

191. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть A_1, B_1, C_1 — три точки на прямых BC, CA и AB соответственно. Введем следующие обозначения:

$$R = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

$$R^* = \frac{\sin \widehat{ACC_1}}{\sin \widehat{C_1CB}} \cdot \frac{\sin \widehat{BAA_1}}{\sin \widehat{A_1AC}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBB_1}}{\sin \widehat{B_1BA}}.$$

Доказать, что $R = R^*$.

192. Теорема Чевы. Для того чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке (или все три были параллельными), необходимо и достаточно, чтобы $R = 1$ (см. задачу 191) и при этом из трех точек A_1, B_1, C_1 нечетное число (т. е. одна или все три) лежало на сторонах треугольника, а не на продолжениях сторон.

193. Теорема Менелая. Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы $R = 1$ (см. задачу 191) и при этом из трех точек A_1, B_1, C_1 четное число (т. е. нуль или две) точек лежало на сторонах треугольника, а не на их продолжениях.

194. Доказать, что если три прямые, проходящие через вершины треугольника, пересекаются в одной точке, то и прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис треугольника, также пересекаются в одной точке или параллельны.

195. Пусть O — произвольная точка плоскости, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на биссектрисы внутреннего и внешнего угла A $\triangle ABC$, P и Q аналогично определены для угла B, R и T — для угла C. Доказать, что прямые MN, PQ и RT пересекаются в одной точке или параллельны.

196. Дан треугольник ABC. На радиусах вписанной окружности, проведенных в точки касания, взяты точки, находящиеся на равных расстояниях от ее центра; эти точки соединены с противоположными вершинами. Доказать, что получившиеся три прямые пересекаются в одной точке.

197. Для того чтобы диагонали AD, BE и CF вписанного в окружность шестиугольника $ABCDEF$ пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $|AB|\cdot|CD|\cdot|EF| = |BC|\cdot|DE|\cdot|FA|$.

198. Пусть из точки A, взятой вне окружности, проведены к окружности две касательные AM и AN (M и N — точки касания) и две секущие, и пусть P и Q — точки пересечения окружности с первой секущей, а K и L — со второй. Доказать, что прямые PK, QL и MN пересекаются в одной точке или параллельны.

Получить отсюда способ построения с помощью одной линейки касательной к данной окружности, проходящей через данную точку.

199. Доказать, что:

а) биссектрисы внешних углов треугольника пересекают продолжения противоположных сторон треугольника в трех точках, расположенных на одной прямой;

б) касательные к описанной около треугольника окружности в вершинах треугольника пересекают его противоположные стороны в трех точках, расположенных на одной прямой.

200. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1 и C_2, сторону CA — в точках B_1 и B_2, сторону BC — в точках A_1 и A_2. Доказать, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_2, BB_2 и CC_2 также пересекаются в одной точке.

201. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1. Пусть C_2 — точка пересечения прямых AB и A_1B_1, A_2 — точка пересечения прямых BC и B_1C_1, B_2 — точка пересечения прямых AC

и A_1C_1. Доказать, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то точки A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой.

202. Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC треугольника ABC в точках D, E и F. Доказать, что середины отрезков DC, AE и BF лежат на одной прямой *(прямая Гаусса)*.

203. Дан треугольник ABC. Определим на стороне BC точку A_1 следующим образом: A_1 — середина стороны KL правильного пятиугольника $MKLNP$, у которого вершины K и L лежат на BC, а вершины M и N — на AB и AC. Аналогичным образом на сторонах AB и AC определены точки C_1 и B_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

204. Через фиксированную точку A внутри окружности проведены две произвольные хорды PQ и KL. Найти множество точек пересечения прямых PK и QL.

205. A, B и C — три данные точки на прямой. D — произвольная точка плоскости, не лежащая на этой прямой. Проведем через C прямые, параллельные AD и BD, до пересечения с прямыми BD и AD в точках P и Q. Найти множество оснований перпендикуляров M, опущенных из C на PQ.

Найти все точки D, для которых M — фиксированная точка.

206. На стороне AC треугольника ABC взята точка K, а на медиане BD — точка P так, что площадь треугольника APK равна площади треугольника BPC. Найти множество точек пересечения прямых AP и BK.

207. Через данную точку O внутри данного угла проходят два луча, образующие данный угол α. Пусть один луч пересекает одну сторону угла в точке A, а другой луч пересекает другую сторону угла в точке B. Найти множество оснований перпендикуляров, опущенных из O на прямую AB.

208. В окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD. Пусть P — произвольная точка окружности, PA пересекает BD в точке E. Прямая, проходящая через E параллельно AC, пересекается с прямой PB в точке M. Найти множество точек M.

209. Дан угол, вершина которого — в точке A, и точка B. Произвольная окружность, проходящая через A и B, пересекает стороны угла в точках C и D (отличных

от A). Найти множество центров тяжести треугольников ACD.

210. Одна вершина прямоугольника находится в данной точке, две другие, не принадлежащие одной стороне, — на двух заданных взаимно перпендикулярных прямых. Найти множество четвертых вершин таких прямоугольников.

211. Пусть A — одна из двух точек пересечения двух данных окружностей; через другую точку пересечения проведена произвольная прямая, пересекающая одну окружность в точке B, а другую — в точке C, отличных от общих точек этих окружностей. Найти множество: а) центров окружностей, описанных около ABC; б) центров тяжестей треугольника ABC; в) точек пересечения высот треугольника ABC.

212. Пусть B и C — две фиксированные точки данной окружности, A — переменная точка этой же окружности. Найти множество оснований перпендикуляров, опущенных из середины AB на AC.

213. Найти мнжоество точек пересечения диагоналей прямоугольников, стороны которых (или их продолжения) проходят через четыре данные точки плоскости.

214. Даны два круга, касающиеся друг друга изнутри в точке A. Касательная к меньшему кругу пересекает бо́льшую окружность в точках B и C. Найти множество центров окружностей, вписанных в треугольники ABC.

215. Даны числа α, β, γ и k. Пусть x, y, z — расстояния от точки M внутри треугольника до его сторон. Доказать, что множество точек M таких, что $\alpha x+\beta y+$ $+\gamma z=k$, или пусто, или отрезок, или совпадает со множеством всех точек треугольника.

216. Найти множество точек M, расположенных внутри данного треугольника и таких, что расстояния от M до сторон данного треугольника равны сторонам некоторого треугольника.

217. Доказать, что если существует окружность, касающаяся прямых AB, BC, CD и DA, то ее центр и середины AC и BD лежат на одной прямой.

218. Даны две пересекающиеся окружности. Найти множество центров прямоугольников с вершинами на этих окружностях.

219. Внутри круглого биллиарда в точке A, отличной от центра, лежит упругий шарик, размерами кото-

рого можно пренебречь. Указать все точки A, из которых можно так направить этот шарик, чтобы он, минуя центр биллиарда, после трех отражений от границы попал в точку A.

220. Через точку, лежащую на равном расстоянии от двух данных параллельных прямых, проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках M и N. Найти множество вершин P равносторонних треугольников MNP.

221. Даны две точки A и B и прямая l. Найти множество центров окружностей, проходящих через A и B и пересекающих прямую l.

222. Даны две точки O и M.

а) Определить множество таких точек плоскости, которые могут служить одной из вершин треугольника с центром описанного круга в точке O и центром тяжести в точке M.

б) Определить множество таких точек плоскости, которые могут служить одной из вершин тупоугольного треугольника с центром описанного круга в точке O и центром тяжести в точке M.

223. В окружность вписан правильный треугольник. Найти множество точек пересечения высот всевозможных треугольников, вписанных в эту же окружность, две стороны которых параллельны двум сторонам данного правильного треугольника.

224. Найти множество центров всевозможных прямоугольников, описанных около данного треугольника. (Прямоугольник будем называть описанным, если одна вершина треугольника совпадает с вершиной прямоугольника, а две другие лежат на двух, не содержащих этой вершины, сторонах прямоугольника.)

225. Даны два квадрата с соответственно параллельными сторонами. Определить множество точек M таких, что для любой точки P из первого квадрата найдется точка Q из второго такая, что треугольник MPQ правильный. Пусть сторона первого квадрата a, второго b. При каком соотношении между a и b искомое множество не пусто?

226. Внутри данного треугольника найти все такие точки M, для каждой из которых для любой точки N, лежащей на границе треугольника, можно найти такую точку P внутри или на его границе, что площадь тре-

гольника MNP не меньше 1/6 площади данного треугольника.

227. Даны две точки A и I. Найти множество точек B таких, что существует треугольник ABC с центром вписанного круга в точке I, все углы которого меньше α ($60° < \alpha < 90°$).

228. Точки A, B и C расположены на одной прямой (B — между A и C). Найти множество точек M таких, что $\operatorname{ctg} \widehat{AMB} + \operatorname{ctg} \widehat{BMC} = k$.

229. Даны две точки A и Q. Найти множество точек B таких, что существует остроугольный треугольник ABC, для которого Q — центр тяжести.

230. Даны две точки A и H. Найти множество точек B таких, что существует треугольник ABC, для которого H — точка пересечения высот и все углы которого больше α ($\alpha < \pi/4$).

231. На плоскости даны два луча. Найти множество точек плоскости, равноудаленных от этих лучей. (Расстояние от точки до луча равно расстоянию от этой точки до ближайшей к ней точки луча.)

232. Доказать, что центр тяжести треугольника, точка пересечения высот и центр описанного круга лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*).

233. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, на стороны треугольника, лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).

234. Доказать, что угол между прямыми Симсона, соответствующими двум точкам окружности, измеряется половиной дуги между этими точками.

235. Пусть H — точка пересечения высот треугольника, F — произвольная точка описанной окружности. Доказать, что прямая Симсона, соответствующая точке F, проходит через одну из точек пересечения прямой FH с окружностью девяти точек (см. задачи 162, 233).

236. Доказать, что на прямой Эйлера треугольника ABC существует такая точка P, что расстояния от центров тяжести треуглольников ABP, BCP, CAP соответственно до вершин C, A и B равны между собой (см. задачу 232).

237. Пусть P — такая точка внутри треугольника ABC, что углы APB, BPC и CPA равны $120°$ (предполагаем, что углы треугольника ABC меньше $120°$). Доказать,

что прямые Эйлера треугольников APB, BPC и CPA пересекаются в одной точке (см. задачу 232).

238. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Пусть M — точка пересечения касательных к окружности в точках A и C, N — точка пересечения касательных, проведенных через B и D, K — точка пересечения биссектрис углов A и C четырехугольника, L — точка пересечения биссектрис углов B и D. Доказать, что если выполняется одно из утверждений: а) M принадлежит прямой BD; б) N принадлежит прямой AC; в) K лежит на BD; г) L лежит на AC, то выполняются остальные три утверждения.

239. Доказать, что 4 прямые, каждая из которых проходит через основания двух перпендикуляров, опущенных из вершины вписанного четырехугольника на не содержащие ее стороны, пересекаются в одной точке.

240. AB и CD — две хорды окружности; M — точка пересечения перпендикуляров, восставленных к AB в точке A и к CD в точке C; N — точка пересечения перпендикуляров, восставленных к AB и CD в точках B и D. Доказать, что прямая MN проходит через точку пересечения BC и AD.

241. Дана окружность S и касательная к ней l. Пусть N — точка касания, NM — диаметр. На прямой NM взята фиксированная точка A. Рассмотрим произвольную окружность, проходящую через A, с центром на l. Пусть C и D — точки пересечения этой окружности с l, а P и Q — точки пересечения прямых MC и MD с S. Доказать, что хорды PQ проходят через фиксированную точку плоскости.

242. Даны три попарно непересекающихся круга. Обозначим через A_1, A_2, A_3 три точки пересечения общих внутренних касательных к любым двум из них, а через B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения внешних касательных. Доказать, что эти точки располагаются на четырех прямых по три на каждой (A_1, A_2, B_3; A_1, B_2, A_3; B_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3).

243. Диаметр окружности, вписанной в треугольник ABC, проходящий через точку касания со стороной BC, пересекает хорду, соединяющую две другие точки касания, в точке N. Доказать, что AN делит BC пополам.

244. В треугольник ABC вписана окружность. Пусть M—точка касания окружности со стороной AC, MK—диа-

метр. Прямая BK пересекает AC в точке N. Доказать, что $|AM| = |NC|$.

245. В треугольник ABC вписана окружность, M — точка касания окружности со стороной BC, MK — диаметр. Прямая AK пересекает окружность в точке P. Доказать, что касательная к окружности в точке P делит сторону BC пополам.

246. Прямая l касается окружности в точке A, пусть CD — хорда окружности, параллельная l, B — произвольная точка прямой l. Прямые CB и DB вторично пересекают окружность в точках L и K. Доказать, что прямая LK делит отрезок AB пополам.

247. Даны две пересекающиеся окружности. Пусть A — одна из точек их пересечения. Из произвольной точки, лежащей на продолжении общей хорды данных окружностей, проведены к одной из них две касательные, касающиеся ее в точках M и N. Пусть, далее, P и Q — точки пересечения (отличные от A) прямых MA и NA со второй окружностью. Доказать, что прямая MN делит отрезок PQ пополам.

248. На высоте BD треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках K и L. Прямые, касающиеся окружности в точках K и L, пересекаются в точке M. Доказать, что прямая BM делит сторону AC пополам.

249. Прямая l перпендикулярна отрезку AB и проходит через B. Окружность с центром на l проходит через A и пересекает l в точках C и D, касательные к окружности в точках A и C пересекаются в N. Доказать, что прямая DN делит отрезок AB пополам.

250. Около $\triangle ABC$ описана окружность. Пусть N — точка пересечения касательных к окружности, проходящих через точки B и C, M — такая точка окружности, что $AM \parallel BC$, K — точка пересечения MN и окружности. Доказать, что KA делит BC пополам.

251. Пусть A — проекция центра данной окружности на прямую l. На этой прямой взяты еще две точки B и C так, что $|AB| = |AC|$. Через B и C проведены две произвольные секущие, пересекающие окружность в точках P, Q и M, N соответственно. Пусть прямые NP и MQ пересекают прямую l в точках R и S. Доказать, что $|RA| = |AS|$.

252. Дан полукруг с диаметром AB. C — точка на полукруге, D — основание перпендикуляра, опущенного

из C на AB. Рассмотрим три окружности: первая окружность, с центром O_1, касается отрезков AD, DC и дуги $\smile{AC}$; вторая, с центром O_2, касается отрезков DB, DC и дуги $\smile{BC}$; третья, с центром O_3, вписана в треугольник ABC. Доказать, что O_3 совпадает с серединой отрезка O_1O_2.

253. Пусть $ABCDEF$ — вписанный шестиугольник. Обозначим через K точку пересечения AC и BF, а через L — точку пересечения CE и FD. Доказать, что диагонали AD, BE и прямая KL пересекаются в одной точке (Паскаль).

254. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Перпендикуляр к BA, восставленный в точке A, пересекает прямую CD в точке M; перпендикуляр к DA, восставленный в точке A, пересекает прямую BC в точке N. Доказать, что MN проходит через центр круга.

255. На каждой стороне треугольника взято по две точки таким образом, что все шесть отрезков, соединяющих каждую точку с противоположной вершиной, равны между собой. Доказать, что середины этих шести отрезков лежат на одной окружности.

256. В треугольнике ABC на лучах AB и CB отложены отрезки $|AM|=|CN|=p$, где p — полупериметр треугольника (B лежит между A и M и между C и N). Пусть K — точка описанной около $\triangle ABC$ окружности, диаметрально противоположная B. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из K на MN, проходит через центр вписанной окружности.

257. Из некоторой точки окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, проведены прямые, параллельные BC, CA и AB и пересекающие CA, AB и BC в точках M, N и Q. Доказать, что M, N и Q лежат на одной прямой.

258. Точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 симметричны относительно прямой l, N — произвольная точка на l. Доказать, что прямые AN, BN, CN пересекают соответственно прямые B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 в трех точках, расположенных на одной прямой.

259. Через точку пересечения высот треугольника проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Доказать, что середины отрезков, высекаемых этими прямыми на сторонах треугольника (на прямых, образующих треугольник), лежат на одной прямой.

260. Доказать, что три прямые, симметричные произвольной прямой, проходящей через точку пересечения высот треугольника, относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

261. Даны два равных непересекающихся круга. На двух общих внутренних касательных берем две произвольные точки F и F'. Из обеих точек к каждому кругу можно провести еще по одной касательной. Пусть касательные, проведенные из точек F и F' к одному кругу, встречаются в точке A, к другому — в точке B. Требуется доказать, что:

1) прямая AB параллельна прямой, соединяющей центры кругов (в случае неравных кругов проходит через точку пересечения внешних касательных);

2) прямая, соединяющая середины FF' и AB, проходит через середину отрезка, соединяющего центры данных кругов.

(Эта задача была предложена читателям журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» профессором В. Ермаковым. Журнал этот издавался в России в прошлом веке. Задача была опубликована в 14 (2)-м номере журнала за 1887 г. За решение задачи читателям была обещана премия — литература по математике.)

262. Дан треугольник ABC; AA_1, BB_1 и CC_1 — его высоты. Доказать, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C пересекаются в такой точке P окружности девяти точек, для которой один из отрезков PA_1, PB_1, PC_1 равен сумме двух других отрезков (Victor Thebault, American Mathematical Monthly; см. задачи 162, 232).

§ 4. Геометрические неравенства и задачи на максимум-минимум

263. Доказать, что если в треугольнике ABC угол B тупой и $|AB| = \frac{|AC|}{2}$, то $\hat{C} > \frac{1}{2}\hat{A}$.

264. Доказать, что окружность, описанная около треугольника, не может проходить через центр вневписанной окружности. (Вневписанная окружность касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Для каждого треугольника существует три вневписанных окружности.)

265. В треугольнике из вершины A выходят медиана, биссектриса и высота. Какой угол больше: между медианой и биссектрисой или между биссектрисой и высотой, если угол $\hat{A}$ равен α?

266. Доказать, что если медианы, проведенные из вершин B и C треугольника ABC, перпендикулярны, то $\operatorname{ctg}\hat{B}+\operatorname{ctg}\hat{C}\geqslant 2/3$.

267. Дан треугольник ABC, $|AB|<|BC|$. Доказать, что для произвольной точки M на медиане, проведенной из вершины B, $\widehat{BAM}>\widehat{BCM}$.

268. Из внешней точки A к окружности проведены две касательные AB и AC, и середины их D и E соединены прямой DE. Доказать, что эта прямая не пересекает окружность.

269. Доказать, что если прямая не пересекает окружность, то для любых двух точек прямой расстояние между ними заключено между суммой и разностью длин касательных, проведенных из этих точек к окружности. Доказать обратное утверждение: если для каких-то двух точек прямой наше утверждение не выполняется, то прямая пересекает окружность.

270. В треугольнике ABC углы связаны соотношением $3\hat{A}-\hat{C}<\pi$. Угол B разделен на четыре равные части прямыми, пересекающими сторону AC. Доказать, что третий из отрезков, на которые разделена сторона AC, считая от вершины A, меньше $|AC|/4$.

271. Пусть a, b, c, d — длины последовательных сторон четырехугольника. Доказать, что если S — его площадь, то $S\leqslant(ac+bd)/2$, причем равенство имеет место только для вписанного четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны.

272. Доказать, что если длины биссектрис треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\sqrt{3}/3$.

273. Доказать, что треугольник ABC будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли выражение $a^2+b^2+c^2-8R^2$ положительно, равно нулю или отрицательно (a, b, c — стороны треугольника, R — радиус описанного круга).

274. Доказать, что если длины сторон треугольника связаны неравенством $a^2+b^2>5c^2$, то c — длина наименьшей стороны.

275. В треугольнике ABC угол B — средний по величине: $\hat{A}<\hat{B}<\hat{C}$; I — центр вписанной окружности,

O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Доказать, что I лежит внутри $\triangle BOH$.

276. Треугольники ABC и AMC расположены так, что MC пересекает AB в точке O, причем $|AM|+|MC|=|AB|+|BC|$. Доказать, что если $|AB|=|BC|$, то $|OB|>|OM|$.

277. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне BC. Доказать, что $(|AM|-|AC|)|BC|\leqslant(|AB|-|AC|)|MC|$.

278. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника ABC, M — произвольная точка плоскости. Найти минимум выражения

$$|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2.$$

279. Стороны угла, величина которого α, являются бортами биллиарда. Какое наибольшее число отражений от бортов может сделать биллиардный шар (размерами шара можно пренебречь)?

280. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 2 км. Деревни соединены дорогами таким образом, что из каждой можно пройти в любую другую. Может ли общая длина дорог быть меньше чем 5,5 км?

281. Точка A расположена между двумя параллельными прямыми на расстоянии a и b от них. Эта точка служит вершиной угла величины α всевозможных треугольников, две другие вершины которых лежат по одной на данных прямых. Найти наименьшее значение площади таких треугольников.

282. Дана окружность радиуса R, O — ее центр, AB — диаметр, точка M — на радиусе OA, причем $\frac{|AM|}{|MO|}=k$. Через M проведена произвольная хорда CD. Чему равно наибольшее значение площади четырехугольника $ACBD$?

283. Вершина угла величины α находится в точке O. A — фиксированная точка внутри угла. На сторонах угла взяты точки M и N так, что $\widehat{MAN}=\beta$ $(\alpha+\beta<180°)$. Доказать, что если $|AM|=|AN|$, то площадь четырехугольника $OMAN$ достигает максимума (среди всевозможных четырехугольников, получающихся при изменении M и N).

284. Учитывая результат предыдущей задачи, решить следующую. Внутри угла с вершиной O взята точка A.

Прямая OA образует со сторонами угла углы φ и ψ. Найти на сторонах угла точки M и N такие, что $\widehat{MAN}=\beta$ $(\varphi+\psi+\beta<180°)$ и площадь четырехугольника $OMAN$ максимальна.

285. Дан треугольник OBC $(\widehat{BOC}=\alpha)$. Для каждой точки A на стороне BC определим точки M и N на OB и OC так, чтобы $\widehat{MAN}=\beta$ $(\alpha+\beta<180°)$ и площадь четырехугольника $OMAN$ была бы максимальной. Доказать, что эта максимальная площадь достигает минимума для таких точек A, M и N, для которых $|MA|=|AN|$, а прямая MN параллельна BC. (Такие точки найдутся, если углы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ $\triangle OBC$ не превосходят $90°+\beta/2$.)

286. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Диагональ AC равна a и образует углы α и β со сторонами AB и AD. Доказать, что площадь четырехугольника заключена между величинами

$$\frac{a^2 \sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha} \text{ и } \frac{a^2 \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{2\sin\beta}.$$

287. Дан угол величины α с вершиной в точке O и точка A внутри него. Рассмотрим всевозможные четырехугольники $OMAN$, у которых вершины M и N расположены на сторонах угла и такие, что $\widehat{MAN}=\beta$ $(\alpha+\beta>180°)$. Доказать, что если среди этих четырехугольников найдется такой выпуклый четырехугольник, что $|MA|=|AN|$, то этот четырехугольник имеет наименьшую площадь среди всех рассматриваемых четырехугольников.

288. Внутри угла с вершиной O дана точка A такая, что OA образует углы φ и ψ со сторонами данного угла. Найти на сторонах угла точки M и N такие, что $\widehat{MAN}=\beta$ $(\varphi+\psi+\beta>180°)$ и площадь четырехугольника $OMAN$ минимальна.

289. Дан треугольник OBC, $\widehat{BOC}=\alpha$; для каждой точки A на стороне BC определим точки M и N на OB и OC так, чтобы $\widehat{MAN}=\beta$ и площадь четырехугольника $OMAN$ была бы минимальной. Доказать, что эта минимальная площадь будет максимальной для таких точек A, M и N, для которых $|MA|=|AN|$ и прямая MN параллельна BC. (Если такой точки A нет,

то максимум будет достигаться в конце стороны BC для вырожденного четырехугольника.)

290. Найти радиус наибольшего круга, который можно покрыть тремя кругами радиуса R. Решить задачу в общем случае, когда радиусы равны R_1, R_2, R_3.

291. Можно ли покрыть тремя единичными квадратами квадрат со стороной 5/4?

292. Чему равна наибольшая площадь правильного треугольника, который можно покрыть тремя правильными треугольниками со стороной 1?

293. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты точки M и N, и на отрезке MN — точка L. Пусть площади треугольников ABC, AML и BNL соответственно равны S, P и Q. Доказать, что

$$\sqrt[3]{S} \geqslant \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}.$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

РАЗДЕЛ I

17. Биссектриса разбивает треугольник на два, площади которых соответственно $\frac{al}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, $\frac{bl}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, а площадь всего треугольника $\frac{ab}{2}\sin\alpha$; значит, $\frac{al}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{bl}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{ab}{2}\times$ $\times\sin\alpha$.

19. Возьмем окружность, касающуюся сторон AB, BC и CD. Если эта окружность не касается стороны DA, то, проведя касательную DA_1 (A_1 — на AB), получим $\triangle DAA_1$, у которого длина одной стороны равна сумме длин двух других.

20. Проведя через вершины треугольника прямые, параллельные противоположным сторонам, получим треугольник, для которого высоты исходного треугольника являются перпендикулярами, восставленными к сторонам в их серединах.

21. $\frac{a+b}{2}$. **22.** $\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$. **23.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})$. **24.** $\frac{m^2\sqrt{3}}{2}$. **25.** $\frac{c+a}{b}$. **28.** $\frac{|a-b|}{2}$. **29.** $\frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha$. **30.** $\frac{h}{2}\times$ $\times\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)$. **31.** 30°. **32.** $\frac{ab}{2}$. **33.** 90°. **36.** $r^2(2\sqrt{3}+3)$. **37.** $l\sqrt{a(2l-a)}$. **38.** $\frac{1}{2}(S_1+S_2)$.

39. Если $a>b$, то биссектриса пересекает боковую сторону CD; если $a<b$, то — основание BC.

40. $\frac{2ab}{a+b}$. **41.** $\arccos\frac{1-k}{1+k}$. **42.** $\frac{a+b}{4}\sqrt{3b^2+2ab-a^2}$. **43.** a^2. **44.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2}}$. **45.** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. **46.** $90^\circ+\frac{\alpha}{2}$. **47.** $\frac{|a-b|}{a+b}\times$ $\times\sqrt{a^2+b^2}$. **48.** $\arcsin\left(1-\frac{a}{b}\right)$. **49.** $(6-\pi):2\pi:(6-\pi)$. **50.** $\frac{a^2}{8}\times$ $\times(\sqrt{2}-1)[(2\sqrt{2}-1)\pi-4]$. **51.** $\frac{a^2}{4}(6\sqrt{3}-6-\pi)$. **52.** $\frac{R^2}{2}\times$ $\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **53.** $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$. **54.** $\frac{d}{3}$. **55.** $\frac{4}{9}S$. **58.** Если $\alpha<$ $<90^\circ$, $\beta<90^\circ$, то углы $\triangle ABC$ равны $90^\circ-\alpha$, $90^\circ-\beta$, $\alpha+\beta$; если $\alpha>90^\circ$, $\beta<90^\circ$, то $\alpha-90^\circ$, $90^\circ+\beta$, $180^\circ-\alpha-\beta$; если

$\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$, то $90^\circ + \alpha$, $\beta - 90^\circ$, $180^\circ - \alpha - \beta$.

59. $\frac{1}{2}\sqrt{m^2-4S}$. 60. $\frac{a}{5}$. 61. $\frac{36}{25}h^2$. 62. $\sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$.

63. В равнобедренном треугольнике с углом при вершине $\pi/5$ биссектриса угла при основании делит треугольник на два треугольника, один из которых подобен исходному.

Ответ. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

64. $R^2\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(\pi-\alpha)\right]$. 65. $\frac{a}{4}\sqrt{10}$. 66. $\frac{a(4\sin^2\alpha+1)}{8\sin\alpha}$.

67. $2r^2(2\sqrt{3}+3)$. 68. $\frac{a^2+4r^2}{4r}$. 69. $\frac{3a}{2(5+\sqrt{13})}$. 70. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

71. 2. 72. $\frac{a^3b}{4(a^2+b^2)}$. 73. $\frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\alpha\right)$. 74. $\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}$.

75. $\frac{R^2-a^2}{2R}$. 76. $\frac{a\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$. 77. $a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)$. 78. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. 79. $\frac{1}{2}\times$ $\times(\gamma+\beta-\alpha)$. 80. $\frac{ac+bd}{a}$. 81. $\frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$. 82. $\frac{|b-a|}{4}\times$ $\times\sqrt{4d^2-(b-a)^2}$. 83. $2(R^2+a^2)$.

84. Возможны два случая: оба центра расположены по разные стороны от общей хорды и по одну. Соответственно две пары ответов: $a(\sqrt{3}+1)$, $a\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ и $a(\sqrt{3}-1)$, $a\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$.

86. $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$. 87. $\sqrt{13}$. 88. $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2k}}{2}$. 89. $\frac{2}{3}$.

90. $\frac{3a^2}{8}$. 91. $4R^2$. 92. $\frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{2}$. (Возможны, вообще говоря, два треугольника, но у одного из них две вершины лежат на продолжениях диагоналей.) 93. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$. 94. $\frac{br}{c}$. 95. $\sqrt{7}$. 96. $\frac{R}{2}\times$ $\times(\sqrt{3}-1)$. 97. $\sqrt{10}$. 98. $\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}-1$. 100. $\frac{1}{3}\sqrt{96-54\sqrt{3}}$.

101. 3 : 4. 102. $a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. 103. $\frac{1}{10}\sqrt{25a^2+c^2+10ac\cos\beta}$.

104. $\frac{3}{4}S$. 105. $\frac{4\sqrt{Rr}(R-r)}{6Rr-r^2-R^2}$. 106. $\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2(b-a\cos\alpha)}$.

107. $\frac{3}{10}c$. 108. $\frac{\sqrt{b^2+a^2+2ab\sin\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. 109. $S\cos^2\alpha$.

110. $\sqrt{4R^2-a^2}$. 111. $\frac{b}{2}$. 112. $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\,|\operatorname{ctg}\alpha|$. 113. $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}ab\cos\alpha}$. 114. $\arcsin\frac{2}{\pi}$ и $\pi-\arcsin\frac{2}{\pi}$.

115. $a^2(\sqrt{2}-1)$. 116. $\frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$, $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$.

117. $\frac{a(b-a\cos\alpha)}{2}\sin^3\alpha$. 118. $\frac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}$. 119. $2\frac{\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$.

120. $2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{(R_2-R_1)\left(R_2\sin^2\frac{\alpha}{2}+R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$. 121. $\frac{150}{7}$.

122. $\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}}$. 123. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$, $\sqrt{a^2+b^2+ab}$. 125. $15°$, $75°$. 126. $\frac{R\sqrt{3}}{8}$. 127. $2\sqrt{6}$. 128. $\sqrt{2}$.

129. $\frac{4}{3}(2\sqrt{3}+3)$. 130. $\frac{2R^2\sin^3\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 131. $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.

132. 1,1. 133. $\frac{a^2}{16R}$. 134. $90°$. 135. $30°$. 136. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

137. $\frac{R(3-2\sqrt{2})}{3}$. 138. $4\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{3-\cos\beta}}$. 139. $\frac{ab\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{a^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+(b-a)^2}}$.

(В треугольнике ONP отрезки KP и NM являются высотами, поэтому OA также высота.)

140. б) Используйте результат пункта а). Замените поворот вокруг O_1 двумя осевыми симметриями, взяв в качестве оси второй симметрии прямую O_1O_2, а поворот вокруг точки O_2 — двумя симметриями, взяв в качестве оси первой симметрии прямую O_1O_2.

Ответ: если $\alpha+\beta<2\pi$, то углы будут равны $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$; если $\alpha+\beta>2\pi$, то углы, соответственно, $\pi-\frac{\alpha}{2}$, $\pi-\frac{\beta}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Замечание. Если $\alpha+\beta=2\pi$, то последовательное применение данных поворотов, как легко убедиться, эквивалентно параллельному переносу.

141. $\frac{a}{2}$.

РАЗДЕЛ II

1. Возьмем на прямой BA точку A_1 так, что $|A_1B|=|A_1C|$. Точки A_1, A, D и C лежат на одной окружности ($\widehat{DA_1C}=90°-\widehat{ABC}=\widehat{DAC}$). Следовательно, $\widehat{A_1AC}=\widehat{A_1DC}=90°$, а значит, и $\widehat{BAC}=90°$.

2. Заметим, что окружность, проходящая через точки касания, является вписанной в треугольник с вершинами в центрах окружностей. Приравнивая выражения для площади треугольника, полученные по формуле Герона и как произведение полупериметра на радиус вписанной окружности, найдем $r=1$.

3. Докажите, что данный треугольник — прямоугольный.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

4. Если $|ED| = |AE| = x$, то $|BE| = a - x$. Записав теорему косинусов для $\triangle BDE$:

$$x^2 = \frac{a^2}{9} + (a-x)^2 - \frac{2}{3}a(a-x)\cdot\frac{1}{2},$$

найдем $x = \frac{7}{15}a$.

Ответ: $|CE| = \frac{13}{15}a$.

5. Обозначив катеты через x и y, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a = \dfrac{xy\sqrt{2}}{x+y}, \\ 4b^2 = x^2 + y^2, \end{cases}$$

из которой найдем xy.

Ответ: $\frac{a^2 + a\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}$.

6. Пусть (рис. 1) $ABCD$ — трапеция, $|DC| = a$, O — центр окружности. AD — боковая сторона, которая точкой касания K разделена на отрезки $|AK| = d$, $|KD| = b$. В $\triangle AOD$ угол AOD прямой, высота OK — радиус окружности, следовательно, $r = |OK| = \sqrt{bd}$. Аналогично, $\triangle COB$ — также прямоугольный треугольник; если M — точка касания на стороне CB, то $|MB| = \frac{r^2}{|CM|} = \frac{bd}{a-b}$.

Ответ: $S = \frac{a^2 + a(d-b)}{a-b}\sqrt{bd}$.

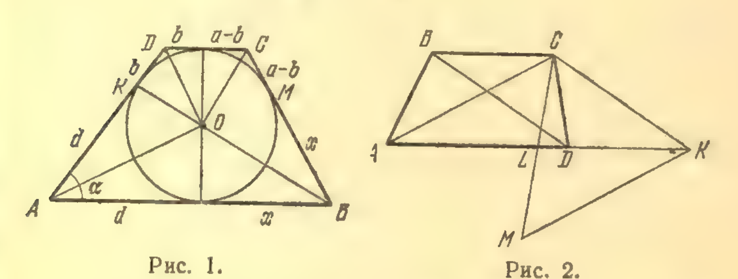


Рис. 1.

Рис. 2.

7. Пусть (рис. 2) $ABCD$ — данная трапеция ($BC \parallel AD$). Проведем через C прямую, параллельную BD, обозначим через K точку пересечения этой прямой с прямой AD. Площадь $\triangle ACK$ равна площади трапеции, стороны AC и CK равны диагоналям трапеции, медиана CL равна расстоянию между серединами AD и BC. Продолжим CL и возьмем на продолжении точку M так, что $|LM| = |CL|$. Получим $\triangle CKM$, равновеликий трапеции $ABCD$, со сторонами, равными ее диагоналям и удвоенному рас-

стоянию между серединами оснований. В нашем случае стороны $\triangle CKM$ — 3, 5 и 4.

Ответ: $S=6$.

8. Пусть $|AM|:|MC|=k$. Условие равенства радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABM и BCM, означает, что их площади относятся, как периметры. Отсюда, поскольку отношение площадей равно k, получим $|BM|=\frac{13k-12}{1-k}$. Из этого равенства, в частности, следует, что $\frac{12}{13}<k<1$. Записывая для треугольников ABM и BCM теоремы косинусов (относительно углов BMA и BMC) и исключая из этих уравнений косинусы углов, получим для k квадратное уравнение с корнями $\frac{2}{3}$ и $\frac{22}{23}$. Учитывая ограничения для k, получаем ответ: $k=\frac{22}{23}$.

9. Из условия следует, что высота к стороне AC равна двум диаметрам вписанной окружности, т. е. 4. Если M, N и K — точки касания с AB, BC и CA, то

$$|BM|=|BN|=r\operatorname{ctg}\frac{\widehat{ABC}}{2}=1\cdot\sqrt{\frac{1+0{,}8}{1-0{,}8}}=\sqrt{9}=3.$$

Если $|MA|=|AK|=x$, $|KC|=|NC|=y$, то, выражая площадь через полупериметр и радиус вписанной окружности и через основание и высоту, получим

$$(3+x+y)=(x+y)\,2,\quad x+y=3.$$

Ответ: $|AC|=3$.

10. Если $Q\geqslant\frac{1}{4}S$, то искомое расстояние будет $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}\times(\sqrt{S}-\sqrt{Q})$. Если же $Q<\frac{1}{4}S$, то возможны два ответа: $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}(\sqrt{S}\pm\sqrt{Q})$.

11. Обозначим через M точку пересечения прямых AB и CD, а через O_1 и O_2 — центры данных окружностей. Пусть $|BM|=|x|$, $|MC|=|y|$, причем знаки x и y выберем таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$|BC|^2=x^2+y^2,\quad |AD|^2=(x+2r)^2+(y+2r)^2,$$
$$|O_1O_2|^2=(x+r)^2+(y+r)^2.$$

Получим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=k^2(x+2r)^2+k^2(y+2r)^2,\\ 4r^2=(x+r)^2+(y+r)^2,\end{cases}$$

откуда $x+y=r\frac{1-5k^2}{1+k^2}$, поэтому

$$S_{ABCD}=\left|\frac{(x+2r)(y+2r)-xy}{2}\right|=|r(x+y)+2r^2|=3r^2\left|\frac{1-k^2}{1+k^2}\right|.$$

Ответ: $S=3r^2\left|\frac{1-k^2}{1+k^2}\right|$.

12. Пусть (рис. 3) O_1, O_2 и O — центры окружностей, M_1, M_2, M — точки их касания со стороной угла, r_1, r_2 и r — радиусы окружностей ($r_1 < r_2$). Проведя через O_1 прямую, параллельную M_1M_2, до пересечения с O_2M_2, получим прямоугольный треугольник с гипотенузой $r_1 + r_2$, катетом $r_2 - r_1$ и противолежащим острым углом $\alpha/2$. Проведя через O прямую, параллельную MM_2, получим два других прямоугольных треугольника.

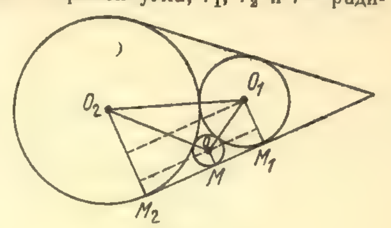


Рис. 3.

Найдя из этих трех треугольников отрезки $|M_1M_2|$, $|M_1M|$ и $|MM_2|$, запишем уравнение $|M_1M_2| = |M_1M| + |MM_2|$.

Ответ: $\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}}+1\right)^2$.

13. Если $\hat{C} = \alpha$, то $|CN| = \frac{b}{2}\cos\alpha$, $|CM| = \frac{a}{2}\cos\alpha$ ($\alpha < 90°$); следовательно, $\triangle CMN$ подобен $\triangle CAB$ с коэффициентом подобия $\frac{\cos\alpha}{2}$, поэтому $|MN| = |AB|\frac{\cos\alpha}{2} = \frac{c}{2}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(a^2+b^2-c^2)c}{4ab}$.

14. Если высота $|CD| = h$, то $|BC| = \frac{h}{\sin\hat{B}}$, $|AC| = \frac{h}{\sin\hat{A}}$. По условию $\frac{h}{\sin\hat{B}} - \frac{h}{\sin\hat{A}} = h$, откуда $\sin\hat{A} - \sin\hat{B} = \sin\hat{A}\sin\hat{B}$, $2\sin\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = \frac{1}{2}[\cos(\hat{A}-\hat{B}) - \cos(\hat{A}+\hat{B})]$, $2\sin\frac{\varphi}{2}\times$ $\times\sin\frac{\hat{C}}{2} = \frac{1}{2}(\cos\varphi + \cos\hat{C})$, $2\sin^2\frac{\hat{C}}{2} + 4\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2} - (1+\cos\varphi) =$ $= 0$. Это — квадратное уравнение относительно $\sin\frac{\hat{C}}{2}$:

$$\sin^2\frac{\hat{C}}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2} = 0,$$

откуда

$$\sin\frac{\hat{C}}{2} = 1 - \sin\frac{\varphi}{2}.$$

15. Если острый угол ромба равен α, то диагонали ромба будут равны $2r\sin\alpha$ и $2R\sin\alpha$. С другой стороны, отношение диагоналей есть тангенс половины этого угла, т. е. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R}$, $\sin\alpha = \frac{2Rr}{R^2+r^2}$.

Ответ: $\frac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$.

16. Если M и N — основания перпендикуляров, опущенных из B на стороны угла, то четырехугольник $AMBN$ — вписанный, причем AB — диаметр окружности, описанной около $\triangle MBN$, так что $\widehat{MBN}=\pi-\alpha$, если B — внутри данного угла или вертикального к нему, и $\widehat{MBN}=\alpha$ в остальных случаях; $|AB|=\frac{|MN|}{\sin\alpha}$.

Ответ: $|AB|=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$, если B лежит внутри данного угла или вертикального к нему; $|AB|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$ в остальных случаях.

17. Обозначим $|AC|=b$, $|BC|=a$. Имеем $b=\frac{h_a}{\sin\hat{C}}$, $a=$ $=\frac{h_b}{\sin\hat{C}}$, $l=\frac{2ab\cos\frac{\hat{C}}{2}}{a+b}$ (см. задачу 17, раздел I). Следовательно,

$$l=\frac{2h_ah_b\cos\frac{\hat{C}}{2}}{\sin\hat{C}\,(h_a+h_b)},\ \text{откуда}\ \sin\frac{\hat{C}}{2}=\frac{h_ah_b}{l\,(h_a+h_b)}.$$

18. Пусть (рис. 4) O_1 — центр второй окружности. Из условия следует, что ее радиус равен одному из катетов; пусть катет $|CA|=R$; так как R — радиус описанной окружности, то $\widehat{CBA}=$ $=30°$, $|CB|=R\sqrt{3}$.

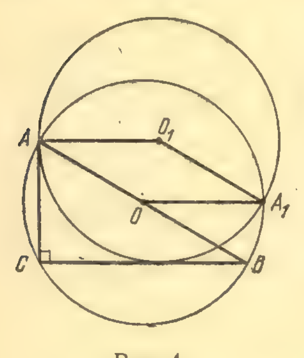


Рис. 4.

Если O — середина AB, то $\widehat{OAO_1}=30°$. Если A_1 — вторая точка пересечения, то $\widehat{OA_1O_1}=$ $=\widehat{OAO_1}=30°$. Следовательно, общей хорде этих кругов соответствуют дуги в 150°, а общая часть состоит из двух сегментов, соответствующих дугам 150°, площадь каждого из которых равна

$$S_{\text{сегм}}=\frac{5}{12}\pi R^2-\frac{R^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi-3}$.

19. Пусть сторона треугольника x и стороны, выходящие из общей точки окружностей, образуют с прямой, проходящей через центры, углы α и β, $\alpha\pm\beta=60°$; тогда $\cos\alpha=\frac{x}{2R}$, $\cos\beta=\frac{x}{2r}$ (или наоборот). Найдя $\sin\alpha$ и $\sin\beta$, из уравнения $\cos(\alpha\pm\beta)=$ $=\frac{1}{2}$ получим

$$x=\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2+r^2-Rr}}.$$

20. Проведем прямую BA и обозначим через D вторую точку пересечения с меньшей окружностью. Рассмотрим дуги $\breve{AB}$ и $\breve{AD}$ (меньшие, чем полуокружность). Поскольку общая касательная к окружностям в точке A образует с AB и AD равные углы, то и центральные углы, соответствующие этим дугам, равны. Следовательно, $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{r}{R}$, $|AD|=a\frac{r}{R}$, $|BC|=\sqrt{|BD|\cdot|BA|}=$ $=a\sqrt{\frac{R+r}{R}}$.

21. Решение задачи аналогично решению предыдущей.

Ответ: $a\sqrt{\frac{R-r}{R}}$.

22. Заметим, что $O_1O_2O_3O_4$ — параллелограмм с углами α и $\pi-\alpha$ ($O_1O_4\perp AC$ и $O_2O_3\perp AC$, значит, $O_1O_4\parallel O_2O_3$ и т. д.). Если K — середина AM, L — середина MC, то $|O_3O_4|=\frac{|KL|}{\sin\alpha}=$ $=\frac{|AC|}{2\sin\alpha}$. Аналогично $|O_2O_3|=\frac{BD}{2\sin\alpha}$, следовательно,

$$S_{O_1O_2O_3O_4}=\frac{|AB|\cdot|BD|\sin\alpha}{4\sin^2\alpha}=\frac{S_{ABCD}}{2\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $2\sin^2\alpha$.

23. Покажите, что биссектрисы параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого параллельны сторонам параллелограмма и равны разности сторон параллелограмма. Следовательно, если a и b — стороны параллелограмма, α — угол между ними, то $S=ab\sin\alpha$, $Q=\frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha$, $\frac{S}{Q}=$ $=\frac{2ab}{(a-b)^2}$.

Ответ: $\frac{S+Q+\sqrt{Q^2+2QS}}{S}$.

24. Если x — площадь треугольника OMN, а y — площадь треугольника CMN, то

$$\frac{|ON|}{|OA|}=\frac{x}{S_1}=\frac{S_3}{S_2},\quad x=\frac{S_1S_3}{S_2},\quad \frac{|AM|}{|MC|}=\frac{S_1+x}{y}=\frac{S_1+S_2}{S_3+x+y},$$

откуда $y=\frac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_3+S_2)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$.

25. Пусть в треугольнике ABC угол C прямой, M — точка пересечения медиан, O — центр вписанной окружности, r — ее радиус, $\widehat{CBA}=\alpha$; тогда

$$|AB|=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{r\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{r\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$|CM|=\frac{1}{3}|AB|=\frac{2r\sqrt{2}}{3\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sqrt{2}\right]},$$

$$|CO|=r\sqrt{2},\quad |OM|=r,\quad \widehat{OCM}=\alpha-\frac{\pi}{4}.$$

Записывая теорему косинусов для $\triangle COM$, обозначив $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$ $=x$, получим

$$1=2+\frac{8}{9(2x-\sqrt{2})^2}-\frac{8x}{3(2x-\sqrt{2})},$$

откуда $x=\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: углы треугольника равны $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$.

26. Пусть отрезки медианы имеют длину a. Обозначим через x меньший из отрезков, на которые разделена точкой касания сторона, соответствующая медиане. Теперь все стороны можно выразить через a и x. Стороны, заключающие медиану: $a\sqrt{2}+x$, $3a\sqrt{2}+x$, третья сторона: $2a\sqrt{2}+2x$. Используя формулу длины медианы, получим

$$9a^2=\frac{2(a\sqrt{2}+x)^2+2(3a\sqrt{2}+x)^2-(2a\sqrt{2}+2x)^2}{4},$$

откуда $x=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

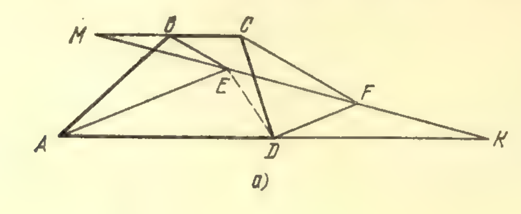
Ответ: 10 : 5 : 13.

27. Пусть $|BC|=a$, $\hat{C}>\hat{B}$, D и E — середины AB и AC. Четырехугольник $EMDN$ — вписанный (так как $\widehat{MEN}=\widehat{MDN}=$ $=90°$), $|MN|=a$, $|ED|=\frac{a}{2}$, MN — диаметр окружности, описанной около $MEND$. Следовательно, $\widehat{DME}=30°$, $\widehat{CAB}=$ $=90°-\widehat{EMD}=60°$, $\widehat{CBA}=\widehat{EDN}=\widehat{EMN}=\frac{1}{2}\widehat{EMD}=15°$, $\widehat{ACB}=105°$.

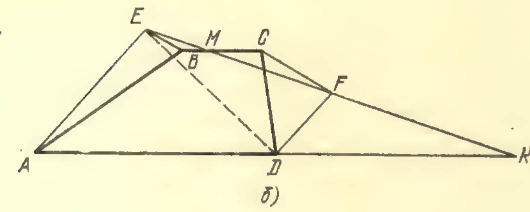
Ответ: $\hat{A}=60°$, $\hat{B}=15°$, $\hat{C}=105°$ или $\hat{A}=60°$, $\hat{B}=105°$, $\hat{C}=15°$.

28. Обозначим через K и M точки пересечения прямой EF с AD и BC. Пусть M лежит на продолжении BC за точку B. Если $|AD|=3a$, $|BC|=a$, то из подобия соответствующих треугольников следует, что $|DK|=|AD|=3a$, $|MB|=|BC|=a$ (рис. 5, a). Кроме того, $|ME|=|EF|=|FK|$. Если h — высота трапеции, то расстояние от E до AD будет $\frac{2}{3}h$, $S_{\triangle EDK}=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}ha=\frac{ha}{3}$, $S_{\triangle EDF}=\frac{1}{2}S_{\triangle EDK}=\frac{ha}{6}=\frac{1}{12}S$.

Если же прямая EF пересекает основание BC в точке M, то $|BM| = \frac{1}{3}a$ (рис. 5, *б*). В этом случае $\frac{|EK|}{|MK|} = 2 : \frac{5}{3} = \frac{6}{5}$ и рас-



а)



б)

Рис. 5.

стояние от E до AD будет $\frac{6}{5}h$, так что $S_{\triangle EFD} = \frac{1}{2} S_{\triangle EDK} =$
$= \frac{1}{4} \cdot 3a \cdot \frac{6}{5} h = \frac{9}{20} S$.

Ответ: $\frac{1}{12} S$ или $\frac{9}{20} S$.

29. Пусть O — центр вписанной окружности, M — середина BC, K, L, M — точки касания вписанной окружности со сторонами AC, AB и BC треугольника. Обозначим $|AK| = |AL| = x$, $|CK| = |CN| = y$, $|BL| = |BN| = z$, $y + z = a$. По условию $|OM| = \frac{a}{2} - r$. Следовательно, $|NM| = \sqrt{|OM|^2 - |ON|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$ и один из отрезков y или z равен $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$, а другой $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$, $yz = ar$. Приравняем выражения для площади треугольника по формулам Герона и $S = pr$:

$$\sqrt{(x+y+z)\,xyz} = (x+y+z)\,r \Longrightarrow xar = (x+a)\,r^2 \Longrightarrow x = \frac{ar}{a-r}.$$

Таким образом, $S = \left(\frac{ar}{a-r} + a\right) r = \frac{a^2 r}{a-r}$.

30. Докажем, что если C_1 и C_2 (рис. 6) находятся по другую сторону от BC, чем вершина A, то центр окружности, описанной около $\triangle CC_1C_2$, находится в точке O на стороне AB, при этом $|BO| = \frac{1}{4}|AB|$. Проведя высоту CM из вершины C, мы получим,

что BC_1CM — прямоугольник. Значит, перпендикуляр, восставленный к CC_1 в середине, проходит через O. Учитывая, что $C_1C_2 \parallel BD$ и $|C_1C_2| = \frac{1}{2}|BD|$, получим, что перпендикуляр к C_1C_2 в его середине также проходит через O. Теперь легко найдем искомый радиус:

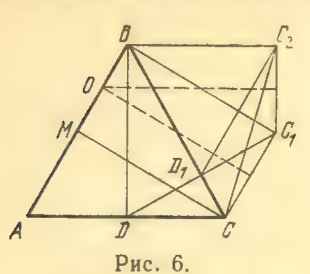


Рис. 6.

$$r = \sqrt{|CM|^2 + |MO|^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{13}.$$

31. Разберите два случая: 1-й, когда основания перпендикуляров находятся на сторонах параллелограмма, и 2-й, когда один из перпендикуляров не пересекает стороны, на которую он опущен. В 1-м случае мы приходим к противоречию, а во 2-м получим, что $\cos\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

32. Выразив угол PQN через углы треугольника и учитывая, что $\widehat{PMN} + \widehat{PQN} = 180°$, найдем $\widehat{PMN} = 60°$, отсюда $\widehat{NPQ} = \widehat{QMN} = 30°$, $\widehat{PNQ} = \widehat{PMQ} = 30°$, т. е. треугольник PQN — равнобедренный с углами при стороне PN по $30°$, $|PQ| = |QN| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

33. Из условия следует, что $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$), AC — биссектриса угла BAD; значит, $|AB| = |BC|$; аналогично $|BC| = |CD|$. Пусть $|AB| = |BC| = |CD| = a$, $|AD| = b$. Расстояние между серединами диагоналей $2r$, следовательно, $\frac{b-a}{2} = 2r$. Проведем высоту BM из точки B на AD,

$$|AM| = \frac{b-a}{2} = 2r, \quad |BM| = 2r.$$

Следовательно, $a = |AB| = 2r\sqrt{2}$, $b = 4r + 2r\sqrt{2}$.

Ответ: $S = 4r^2(\sqrt{2}+1)$.

34. Обозначим углы A, B и C через α, β и γ. Пусть H — точка пересечения высот, O — центр окружности, проходящей через A, H и C. Тогда

$$\widehat{HOC} = 2\widehat{HAC} = 2(90° - \gamma),$$

$$\widehat{HOA} = 2\widehat{HCA} = 2(90° - \alpha).$$

Но $\widehat{AOC} = 180° - \beta$ (так как $BAOC$ — вписанный), $2(90° - \gamma) + 2(90° - \alpha) = 180° - \beta$, $360° - 2\alpha - 2\gamma = 180° - \beta$, $2\beta = 180° - \beta$, $\beta = 60°$, $|AC| = 2R\sin\beta = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

35. Обозначив отношение $\frac{|AM|}{|MC|}=\lambda$, будем иметь $S_{MCP}=\frac{T}{\lambda}$, $S_{CPN}=\lambda Q$, $\frac{S_{MCP}}{S_{CPN}}=\lambda$, т. е. $\frac{T}{Q}=\lambda^3$,

$$S_{ABC}=\frac{|AC|}{|MC|}\cdot\frac{|BC|}{|CN|}S_{CMN}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}\left(\frac{T}{\lambda}+\lambda Q\right)=$$
$$=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2}(T+\lambda^2 Q)=(\lambda+1)^3 Q=(T^{1/3}+Q^{1/3})^3.$$

36. Если O — центр окружности, то площадь $\triangle OMN$ в $\frac{a}{a-R}$ раз больше площади $\triangle KMN$. Если $\widehat{MON}=\alpha$, то $\frac{R^2}{2}\sin\alpha=\frac{a}{a-R}S$, $\sin\alpha=\frac{2aS}{R^2(a-R)}$, $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Ответ: $|MN|=R\sqrt{2\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4a^2S^2}{R^4(a-R)^2}}\right)}$.

Задача имеет решение, если $S\leqslant\frac{R^2(a-R)}{2a}$.

37. Если $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=2\alpha$, то по теореме синусов найдем

$$|AE|=\frac{2m\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha},\quad |AF|=\frac{|AE|}{\cos\alpha}=\frac{2m\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha\cos\alpha}.$$

Таким образом, $\frac{9}{4}m=\frac{2m\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha\cos\alpha}$, откуда $\cos 2\alpha=\frac{7}{18}$, $S_{\triangle ABC}=$ $=m^2\operatorname{tg}2\alpha=\frac{5m^2\sqrt{11}}{7}$.

38. Точки C, M, D и L лежат на одной окружности, следовательно, $\widehat{CML}=\widehat{CDL}=30^\circ$. Точно так же $\widehat{CMK}=30^\circ$; таким образом, $\widehat{LMK}=60^\circ$ и $\triangle LMK$ — правильный, $|KL|=\frac{2}{\sqrt{5}}$. По теореме косинусов найдем, что $\cos\widehat{LCK}=-\frac{3}{5}$. Поскольку $\widehat{DCB}=$ $=\widehat{LCK}-120^\circ$, найдем $|DB|$.

Ответ: $|DB|=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

39. Пусть A — точка пересечения прямых BC и KM. Четырехугольник $ONBC$ — вписанный ($\widehat{OCB}=\widehat{ONB}=90^\circ$), следовательно, $\widehat{OBC}=\widehat{ONC}=\frac{\alpha}{2}$. Точно так же вписанным является четырехугольник $CMAO$ и $\widehat{CAO}=\widehat{CMO}=\frac{\alpha}{2}$, т. е.

$\triangle OAB$ — равнобедренный,

$$|CB| = |AC| = \frac{|CO|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

40. Точки E, M, B и Q (рис. 7) лежат на одной окружности с диаметром BE, а точки E, P, D и N — на окружности с диаметром ED.

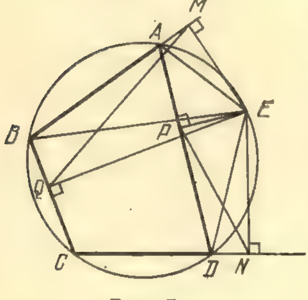


Рис. 7.

Таким образом, $\widehat{EMQ} = \widehat{EBQ} = 180° - \widehat{EDC} = \widehat{EDN} = \widehat{EPN}$; аналогично $\widehat{EQN} = \widehat{ENP}$, т. е. $\triangle EMQ$ подобен $\triangle EPN$ с коэффициентом подобия $\sqrt{k}$. (Для полноты решения необходимо рассмотреть и другие случаи расположения точек.)

Ответ: $d\sqrt{k}$.

41. Продолжим непараллельные стороны трапеции до пересечения, мы получим три подобных треугольника, причем коэффициент подобия между средним и большим треугольником и между меньшим и средним один и тот же. Обозначим этот коэффициент через λ, большее основание — через x, радиус большей окружности — через R. Тогда отрезки, параллельные x, будут соответственно λx и $\lambda^2 x$, бóльшая боковая сторона нижней трапеции $2R\frac{d}{c}$, второй радиус λR. Значит, $R + \lambda R = \frac{c}{2}$. По свойству описанного четырехугольника $x + \lambda x = 2R + 2R\frac{d}{c}$. И наконец, опустив из конца меньшего основания всей трапеции перпендикуляр на большее основание, получим прямоугольный треугольник с катетами c, $x - \lambda^2 x$ и гипотенузой d. Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} x(1+\lambda) = 2R\dfrac{c+d}{c}, \\ x(1-\lambda^2) = \sqrt{d^2 - c^2}, \\ R(1+\lambda) = \dfrac{c}{2}, \end{cases}$$

откуда $\lambda = \frac{d - \sqrt{d^2 - c^2}}{c}$.

Ответ: основания равны $\frac{d - \sqrt{d^2 - c^2}}{2}$ и $\frac{d + \sqrt{d^2 - c^2}}{2}$.

42. Опустим из центров окружностей перпендикуляры на одну из боковых сторон и проведем через центр меньшей окружности прямую, параллельную этой стороне. Получится прямоугольный

треугольник с гипотенузой $R+r$, одним катетом $R-r$ и острым углом при этом катете α, равным острому углу при основании трапеции. Таким образом,

$$\cos\alpha=\frac{R-r}{R+r}.$$

Большее основание равно

$$2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2R\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=2R\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Меньшее основание равно

$$2r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2r\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=2r\sqrt{\frac{r}{R}}.$$

43. Возьмем на стороне AB точку K так, что $|BK|=|BD|$, а на продолжении AC — точку E так, что $|CE|=|CD|$. Покажем, что $\triangle ADK$ подобен $\triangle ADE$. Если $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ — величины углов $\triangle ABC$, то

$$\widehat{DKA}=180^\circ-\widehat{DKB}=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\hat{B}}{2}\right)=90^\circ+\frac{\hat{B}}{2},$$

$$\widehat{ADE}=180^\circ-\widehat{CED}-\frac{\hat{A}}{2}=180^\circ-\frac{\hat{A}}{2}-\frac{\hat{C}}{2}=90^\circ+\frac{\hat{B}}{2}.$$

Таким образом, $\widehat{AKD}=\widehat{ADE}$. Кроме того, по условию $\widehat{DAE}=\widehat{DAK}$.

Ответ: $|AD|=\sqrt{ab}$.

44. В обозначениях предыдущей задачи

$$|AD|^2=(|AC|+|CD|)(|AB|-|BD|)=$$
$$=|AC|\cdot|AB|-|CD|\cdot|BD|+(|AB|\cdot|CD|-|AC|\cdot|BD|).$$

Но слагаемое в скобках равно нулю, поскольку (см. задачу 9, раздел I) $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{|BD|}{|CD|}$.

45. Продолжим BN и CN до вторичного пересечения со второй окружностью в точках K и L соответственно. $|MN|=|NK|$, так как $\widehat{ANB}=90^\circ$ и MK есть хорда окружности с центром в A. $\widehat{LNK}=\widehat{BNC}=\widehat{BND}$ (так как равны соответствующие дуги). Таким образом, $|LN|=|ND|=b$, $|MN|\cdot|NK|=|MN|^2=ab$, $|MN|=\sqrt{ab}$.

46. Заметим (рис. 8), что $PQ\perp CB$. Пусть T — точка пересечения MN и PQ, L и K — основания перпендикуляров, опущенных из C и B на прямую MN (L и K лежат на окружностях, построенных на CN и BM как на диаметрах). Используя свойства пересекающихся хорд в окружностях, получим

$$|PT|\cdot|TQ|=|NT|\cdot|LT|,$$
$$|PT|\cdot|TQ|=|MT|\cdot|TK|.$$

Но $|LT|=|CD|$, $|TK|=|DB|$ (так как $CLKB$ — прямоугольник, а $PQ \perp CB$). Таким образом, $|NT|\cdot|CD|=|MT|\cdot|DB|$, $\frac{|MT|}{|NT|}=\frac{|CD|}{|DB|}$, т. е. прямая PQ делит CB и MN в одном и том же отношении; значит, PQ проходит через A, а D есть основание высоты.

Ответ: $\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

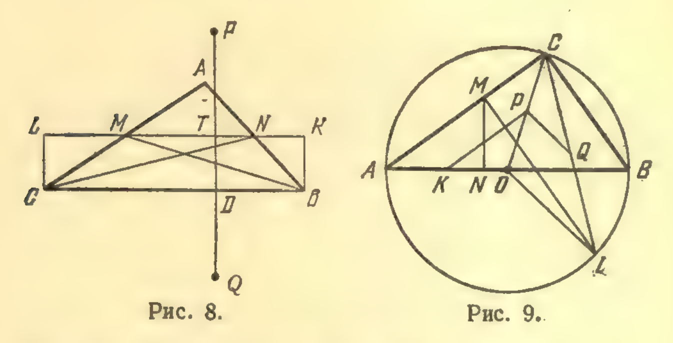


Рис. 8. Рис. 9.

47. Пусть (рис. 9) $\breve{BC}=2\alpha$, $\breve{BL}=2\beta$. Тогда

$$|AC|=2R\cos\alpha,\quad |CL|=2R\sin(\alpha+\beta),$$

$$|CM|=|CL|\cos(90^\circ-\beta)=2R\sin(\alpha+\beta)\sin\beta,$$

$$|AM|=|AC|-|CM|=2R[\cos\alpha-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta]=$$

$$=2R\left[\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos(\alpha+2\beta)\right]=2R\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$$

и, наконец, $|AN|=a=|AM|\cos\alpha=2R\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$. С другой стороны, если K, P и Q — середины AO, CO и CL соответственно, то $|KP|=\frac{1}{2}|AC|=R\cos\alpha$, $|PQ|=\frac{R}{2}$, $\widehat{KPQ}=\widehat{KPO}+\widehat{OPQ}=\alpha+180^\circ-\widehat{COL}=\alpha+180^\circ-2\alpha-2\beta=180^\circ-\alpha-2\beta$ и, по теореме косинусов, $|KQ|^2=\frac{R^2}{4}+R^2\cos^2\alpha+R^2\cos\alpha\times\cos(\alpha+2\beta)=\frac{R^2}{4}+2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\frac{R^2}{4}+Ra$.

Ответ: $\sqrt{\frac{R^2}{4}+Ra}$.

48. Пусть прямые AM и AN пересекают прямую BC в точках D и E. Легко видеть, что треугольники ABD и ACE равнобедренные (биссектриса является высотой), т. е. $|DE|$ равняется периметру треугольника ABC, а MN — средняя линия в треугольнике ADE.

49. Обозначим одну из точек пересечения, через которую проходит прямая, через C. Пусть B_1, B_2, B_3 — основания перпендикуляров, опущенных из O_1, O_2, O_3 на прямую, а K и M — точки пересечения прямых, параллельных A_1A_3, проходящих через O_1 и O_2, соответственно с O_2B_2 и O_3B_3. Поскольку B_1 и B_2 — середины хорд A_1C и CA_2, $|B_1B_2| = \frac{1}{2}|A_1A_2|$. Если α — угол между прямыми A_1A_3 и O_1O_3, то

$$\frac{|A_1A_2|}{|O_1O_2|} = \frac{2|B_1B_2|}{|O_1O_2|} = 2\frac{O_1K}{|O_1O_2|} = 2\cos\alpha;$$

аналогично

$$\frac{|A_2A_3|}{|O_2O_3|} = 2\cos\alpha;$$

отсюда следует искомое равенство.

50. Имеем

$$\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{S_{ABM}}{S_{MBC}} = \frac{\frac{1}{2}|MB|\cdot|BA|\sin\widehat{MBA}}{\frac{1}{2}|MB|\cdot|BC|\sin\widehat{MBC}} =$$

$$= \frac{|BA|^2}{|BC|^2}\frac{|BC|}{\sin\widehat{MBC}}\frac{\sin|\widehat{MBA}|}{|BA|}.$$

Но $\sin\widehat{MBC} = \sin\widehat{BAC}$, $\sin\widehat{MBA} = \sin\widehat{BCA}$, а по теореме синусов $\frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{|BA|}{\sin\widehat{BCA}}$. Следовательно, $\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|BA|^2}{|BC|^2} = k^2$.

51. Из задачи 50 следует, что $\frac{|AM|^2}{|MB|^2} = \frac{|AC|}{|BC|}$, $\frac{|AN|^2}{|NB|^2} = \frac{|AD|}{|BD|}$. Если K — точка пересечения MN и AB, то

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{S_{AMN}}{S_{BMN}} = \frac{|AM|\cdot|AN|\sin\widehat{MAN}}{|MB|\cdot|NB|\sin\widehat{MBN}} =$$

$$= \sqrt{\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{|AD|}{|BD|}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}}.$$

52. Пусть K, L, M и N — точки касания сторон AB, BC, CD и DA с окружностью. Обозначим через P точку пересечения AC и KM. Если $\widehat{AKM} = \varphi$, то $\widehat{KMC} = 180° - \varphi$. Таким образом,

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{S_{AKM}}{S_{KMC}} = \frac{\frac{1}{2}|AK|\cdot|KM|\sin\varphi}{\frac{1}{2}|KM|\cdot|MC|\sin(180° - \varphi)} = \frac{|AK|}{|MC|} = \frac{a}{b}.$$

Но в таком же отношении разделит AC и прямая NL. Значит, прямые AC, KM и NL пересекаются в одной точке. Применяя те же рассуждения к диагонали BD, мы получим, что BD также проходит через точку P. Искомое отношение равно a/b.

53. Пусть P и Q — точки пересечения соответственно BK и AC, AB и DC. Прямая QP пересекает AD в точке M, BC — в точке N. Используя подобие соответствующих треугольников, можем записать следующие равенства:

$$\frac{|AM|}{|MD|}=\frac{|BN|}{|NC|}=\frac{|MK|}{|AM|}=\frac{|AK|-|AM|}{|AM|}.$$

Если $|AM|=x|AD|$, то $\frac{|AM|}{|MD|}=\frac{|AM|}{|AD|-|AM|}=\frac{x}{1-x}$, $\frac{x}{1-x}=$ $=\frac{\lambda-x}{x}$, откуда $x=\frac{\lambda}{\lambda+1}$.

Ответ: $\frac{|AM|}{|AD|}=\frac{\lambda}{\lambda+1}$.

Если $\lambda=\frac{1}{n}$, то $|AM|=\frac{1}{n+1}|AD|$. Таким образом, взяв сначала K совпадающей с D ($\lambda=1$), получим в качестве M_1 середину AB; взяв K совпадающей с M_1, найдем, что M_2 отделяет 1/3 от AD, и т. д.

54. Пусть $|KM|=|KN|=x$, $|AD|=y$, $|DB|=z$. Тогда $|CD|=$ $=\sqrt{yz}$, $y+z=c$. Радиус вписанной в $\triangle AKB$ окружности равен $\frac{1}{2}|CD|=\frac{1}{2}\sqrt{yz}$. Выразим площадь треугольника AKB по формулам Герона и $s=pr$. Получим уравнение

$$\sqrt{(x+y+z)\,xyz}=(x+y+z)\frac{1}{2}\sqrt{yz}.$$

Учитывая, что $y+z=c$, найдем $x=c/3$.

55. Проведем через A_2 прямую, параллельную AC. Пусть R — точка пересечения этой прямой с AB. Из того, что $\frac{|AR|}{|RC_1|}=$ $=\frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|}=\frac{1}{k}$, $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=k$, найдем $\frac{|AR|}{|AB|}=\frac{k}{(k+1)^2}$. Точно так же, проведя через C_2 прямую, параллельную AC, до пересечения с BC в точке S, получим, что $\frac{|CS|}{|CB|}=\frac{k}{(k+1)^2}$. Поэтому точки R, A_2, C_2 и S лежат на одной прямой, параллельной AC. Таким образом, стороны $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ параллельны. Теперь нетрудно получить, что $|A_2C_2|=|RS|-|RA_2|-|C_2S|=|AC|\times$ $\times\left(1-\frac{3k}{(k+1)^2}\right)$; поэтому коэффициент подобия равен $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$.

56. Воспользуемся следующей формулой для площади треугольника: $S=2R^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$, где $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ — величины углов треугольника. Тогда площадь треугольника $A_1B_1C_1$, где A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения биссектрис $\triangle ABC$ с описанной окружностью, будет равна

$$S_1=2R^2\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\sin\frac{\hat{C}+\hat{A}}{2}=2R^2\cos\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}$$

и

$$\frac{S}{S_1}=8\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}.$$

С другой стороны (рис. 10) имеем: $|BC|=2R\sin\hat{A}$,

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\hat{B}}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\hat{C}}{2}\right)=2R\sin\hat{A},\quad r\frac{\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}}{\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}}=2R\cdot 2\sin\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2},$$

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}=\frac{r}{4R};$$ таким образом, $\frac{S}{S_1}=\frac{2r}{R}$.

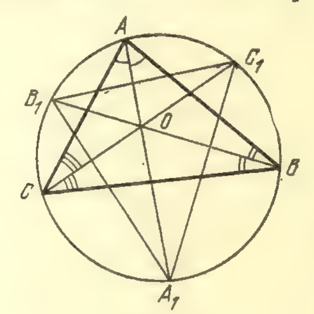


Рис. 10.

57. Пусть O — центр подобия вписанного и описанного треугольников, M_1 и M_2 — две сходственные вершины (M_1 лежит на стороне AB), отрезок OA пересекает вписанный треугольник в точке K. Тогда $S_{OM_1K}=\lambda S_1$, $S_{OM_2A}=\lambda S_2$, $\frac{S_{OM_1A}}{S_{OM_2A}}=\frac{OM_1}{OM_2}=$ $=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$, откуда $S_{OM_1A}=\lambda\sqrt{S_1S_2}$, где $\lambda=\frac{S_{OM_1K}}{S_1}$. Рассмотрев шесть таких треугольников и сложив их площади, получим $S_{ABC}=\sqrt{S_1S_2}$.

58. Пусть O — центр описанного круга, H — точка пересечения высот $\triangle ABC$. Поскольку прямая OH перпендикулярна биссектрисе угла A, то она пересекает стороны AB и AC в таких точках K и M, что $|AK|=|AM|$. Таким образом, $|AO|=|OB|$ и $\widehat{AOB}=2\hat{C}$ (считаем, что угол C — острый), $\widehat{OAK}=90°-\hat{C}=\widehat{HAM}$. Значит, $\triangle OAK=\triangle HAM$ и $|OA|=|HA|=R$ (R — радиус описанного круга). Если D — основание перпендикуляра, опущенного из O на BC, то $|OD|=\frac{1}{2}|AH|=\frac{R}{2}$. Следовательно, $\cos\hat{A}=$ $=\cos\widehat{DOC}=\frac{1}{2}$ и $A=60°$.

59. Докажите, что треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, если расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения высот будет соответственно меньше, равно или больше половины наибольшей стороны.

Ответ: углы треугольника равны 90°, 60° и 30°.

60. Условие $S_{\triangle BDM}=S_{\triangle BCK}$ означает, что

$$|BD|\cdot|BM|=|BK|\cdot|BC|$$

или

$$(|BA|+|AC|)\,|BM|=|BK|\cdot|BC|. \qquad (1)$$

Проведем через M прямую, параллельную AC; пусть L — точка пересечения этой прямой с BA. Докажем, что $|LM|=|KL|$; отсюда будет следовать, что искомый угол $\widehat{BKM}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=\frac{\alpha}{2}$. Поскольку $\triangle BLM$ и $\triangle BAC$ подобны, то

$$|LM|=\frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AC|,\quad |BL|=\frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AB|.$$

Теперь найдем из (1) $|BK|$ и посчитаем $|KL|=|BK|-|BL|=$ $=\frac{|BA|+|AC|}{|BC|}\cdot|BM|-\frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AB|=\frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AC|$, т. е. в самом деле $|LM|=|KL|$.

Ответ: $\alpha/2$.

61. Пусть $|AD|=a$, $|BC|=b$. Опустим из O перпендикуляр OK на AB. Теперь можно найти $|BK|=\sqrt{ab}\,\frac{b}{b+a}$, $|BE|=\sqrt{ab}\,\frac{b}{a-b}$, $|MK|=\frac{\sqrt{ab}}{2}-\sqrt{ab}\,\frac{b}{b+a}=\sqrt{ab}\,\frac{a-b}{2(a+b)}$, $|EK|=|BE|+|BK|=$ $=\sqrt{ab}\,\frac{2ab}{(a-b)(a+b)}$, $|OK|=\frac{ab}{a+b}$. Легко проверить, что $|OK|^2=$ $=|EK|\cdot|MK|$.

Ответ: $\widehat{EOM}=90°$.

62. Заметим, что точки A, M, N и O лежат на одной окружности (рис. 11). Следовательно, $\widehat{NMO}=\widehat{OAN}=90°-\widehat{AON}$. Значит, при повороте OA вокруг O на угол φ прямая NM повернется на такой же угол φ (в другом направлении), а при перемещении A по прямой OA прямая NM перемещается параллельно самой себе. Отсюда следует, что искомый угол равен α.

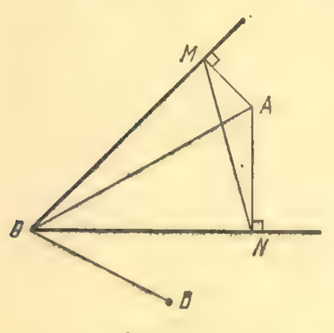


Рис. 11.

63. Если O_1 — центр меньшей окружности, а $\widehat{BOA}=\varphi$, то $\widehat{BAO}=90°-\frac{\varphi}{2}$, $\widehat{CO_1A}=90°+\varphi$, $\widehat{CAO_1}=45°-\frac{\varphi}{2}$. Таким образом, $\widehat{BAC}=\widehat{BAO}-\widehat{CAO_1}=45°$.

Ответ: 45°.

64. Построим на AB внутри квадрата правильный треугольник ABK. Тогда $\widehat{KAB}=60°$, $\widehat{KCD}=15°$, т. е. K совпадает с M.

Ответ: 30°.

65. Если $\widehat{BAC}=2\alpha$, то легко найдем, что $\widehat{KMC}=\widehat{MKC}=30°+\alpha$, т. е. $|MC|=|KC|$. Продолжим MK до пересечения с окружностью в точке N; $\triangle KMC$ подобен $\triangle KAN$, значит, $|AN|=|KN|=R$ — радиус окружности (так как $\widehat{AMN}=30°$).

Точки A, K и O лежат на окружности с центром в N, $\widehat{ANO}=60°$; следовательно, $\widehat{AKO}=30°$ или $150°$, в зависимости от того, тупой или острый угол AMC.

Ответ: 30° или 150°.

66. Проведем (рис. 12) биссектрису угла A и продолжим BM до пересечения с нею в точке N. Так как $|BN|=|NC|$, то $\widehat{BNC}=120°$; значит, и углы $\widehat{BNA}$, $\widehat{CNA}$ также по 120°, $\widehat{NCA}=\widehat{NCM}=20°$, т. е. $\triangle NMC=\triangle NCA$, $|MC|=|AC|$, $\triangle AMC$ — равнобедренный.

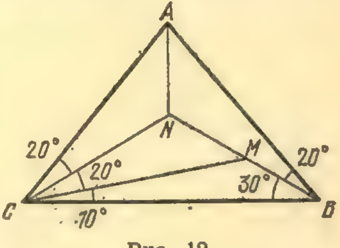


Рис. 12.

Ответ: 70°.

67. Опишем около $\triangle MCB$ окружность (рис. 13) и продолжим BN до пересечения с нею в точке M_1; $|CM_1|=|CM|$, так как углы, на них опирающиеся (80° и 100°), в сумме дают 180°; $\widehat{M_1CM}=\widehat{M_1BM}=20°$, т. е. NC — биссектриса угла M_1CM, и $\triangle M_1CN=\triangle NCM$, $\widehat{NMC}=\widehat{NM_1C}=\widehat{CMB}=25°$.

Ответ: 25°.

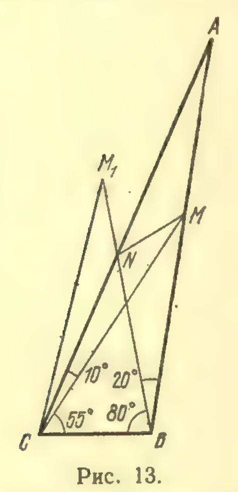


Рис. 13.

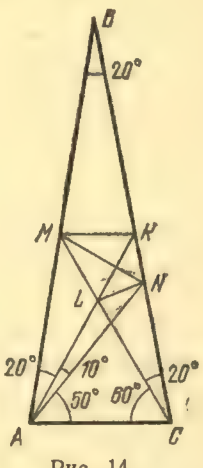


Рис. 14.

68. Возьмем на BC точку K (рис. 14) так, что $\widehat{KAC}=60°$, $MK \parallel AC$. Пусть L — точка пересечения AK и MC; $\triangle ALC$ — правильный, $\triangle ANC$ — равнобедренный (подсчитайте углы). Значит,

$\triangle LNC$ также равнобедренный, $\widehat{LCN}=20°$. Теперь найдем углы NLM и MKN — они по $100°$; так как $\triangle MKL$ правильный, то углы $\widehat{KLN}$ и $\widehat{NKL}$ — по $40°$, т. е. $|KN|=|LN|$ и $\triangle MKN = \triangle MLN$, $\widehat{NML}=\widehat{KMN}=30°$.

Ответ: $30°$.

69. Возьмем (рис. 15) точку K так, чтобы $\widehat{KBC}=\widehat{KCB}=30°$, и обозначим через L точку пересечения прямых MC и BK. Так как $\triangle BNC$ равнобедренный ($\widehat{NBC}=\widehat{NCB}=50°$), то $\widehat{KNC}=40°$. Точка L есть точка пересечения биссектрис треугольника NKC (LK и LC — биссектрисы). Следовательно, NL также биссектриса угла KNC и $\widehat{LNB}=60°$; BN, в свою очередь, биссектриса угла MBL; кроме того, $BN \perp ML$; значит, BN делит ML пополам и $\widehat{MNB}=\widehat{BNL}=60°$, а $\widehat{NMC}=30°$.

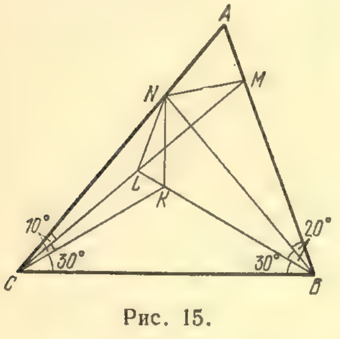


Рис. 15.

Ответ: $30°$.

70. Пусть O — центр вписанной окружности; точки C, O, K и M лежат на одной окружности: $\left(\widehat{COK}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=90°-\frac{\hat{B}}{2}=\widehat{KMB}=180°-\widehat{KMC}\right.$; если же точка K — на продолжении NM, то $\left.\widehat{COK}=\widehat{CMK}\right)$. Таким образом, $\widehat{OKC}=\widehat{OMC}=90°$.

71. Обозначим через K точку пересечения окружности с центром B и радиусом $|AB|$ и окружности с центром F и радиусом $|AF|$. Тогда $\widehat{AKC}=180°-\frac{\alpha}{2}$, $\widehat{AKE}=180°-\frac{\gamma}{2}$; учитывая условие, получим, что $\widehat{CKE}=180°-\frac{\beta}{2}$; значит, K лежит на окружности с центром D и радиусом $|CD|$. Поэтому $\widehat{KBF}=\widehat{ABF}$, $\widehat{KBD}=\widehat{CBD}$, т. е. $\widehat{FBD}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}=\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$.

72. Если P лежит на дуге $\overset{\frown}{AB}$, Q — на дуге $\overset{\frown}{AC}$, то для углов $\widehat{PAB}=\varphi$, $\widehat{QAC}=\psi$ получим два соотношения:

$$\begin{cases} \sin^2(\hat{C}-\varphi)=\sin\varphi\sin(\hat{B}+\hat{C}-\varphi) \\ \sin^2(\hat{B}-\psi)=\sin\psi\sin(\hat{B}+\hat{C}-\psi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\cos 2(\hat{C}-\varphi)=\cos(\hat{B}+\hat{C}-2\varphi)-\cos(\hat{B}+\hat{C}), \\ 1-\cos 2(\hat{B}-\psi)=\cos(\hat{B}+\hat{C}-2\psi)-\cos(\hat{B}+\hat{C}). \end{cases}$$

Запишем разность этих равенств:

$$\sin(\hat{B}+\hat{C}-\varphi-\psi)\sin[(\hat{B}-\hat{C})+(\varphi-\psi)] =$$
$$=\sin(\hat{B}+\hat{C}-\varphi-\psi)\sin(\varphi-\psi),$$

откуда (поскольку $0<\hat{B}+\hat{C}-\varphi-\psi<\pi$) получим, что $\hat{B}-\hat{C}+(\varphi-\psi)=\pi-(\varphi-\psi)$.

Ответ: $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$.

73. Докажем (рис. 16), что $\triangle CMN$ подобен $\triangle CAB$. Имеем $\widehat{MCN}=\widehat{CBA}$. Поскольку четырехугольник $CBDM$ вписанный, то

$$\frac{|CM|}{|CB|}=\frac{\sin\widehat{CBM}}{\sin\widehat{CMB}}=\frac{\sin\widehat{CDM}}{\sin\widehat{CDB}}=$$
$$=\frac{\sin\widehat{DBA}}{\sin\widehat{ADB}}=\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|CN|}{|AB|}.$$

Значит, $\widehat{CMN}=\widehat{BCA}$, т. е. искомый угол равен или $\dfrac{\alpha}{2}$ или $180°-\dfrac{\alpha}{2}$.

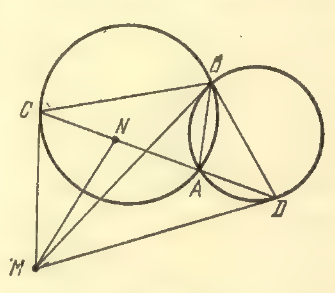


Рис. 16.

74. Пусть $\widehat{ABC}=120°$, BD, AE, CM — биссектрисы $\triangle ABC$. Покажем, что DE — биссектриса угла BDC, а DM — биссектриса угла BDA. Для этого достаточно показать, что

$$\frac{|BE|}{|EC|}=\frac{|BD|}{|DC|}$$

(аналогично для точки M). Но это вытекает из соотношений

$$\frac{|BE|}{|EC|}=\frac{|AB|}{|AC|},$$
$$|BD|=\frac{2|AB|\cdot|BC|\cos 60°}{|AB|+|BC|}=\frac{|AB|\cdot|BC|}{|AB|+|BC|}$$

(см. задачу 17, раздел I) и

$$|DC|=\frac{|AC|\cdot|BC|}{|AB|+|BC|}.$$

75. Обозначим $\widehat{ABD}=\alpha$, $\widehat{BDC}=\varphi$. По условию $\widehat{DAC}=120°-\alpha$, $\widehat{BAC}=30°+\alpha$, $\widehat{ADB}=30°-\alpha$, $\widehat{DBC}=60°+\alpha$. По теореме синусов для треугольников ABC, BCD, ACD получим

$$\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{\sin(30°+\alpha)}{\sin(60°+2\alpha)}=\frac{1}{2\cos(30°+\alpha)},$$
$$\frac{|DC|}{|BC|}=\frac{\sin(60°+\alpha)}{\sin\varphi},$$
$$\frac{|AC|}{|DC|}=\frac{\sin(30°-\alpha+\varphi)}{\sin(120°-\alpha)}.$$

Перемножая эти равенства, будем иметь

$$\sin(30°-\alpha+\varphi)=\sin(30°+\alpha+\varphi)-\sin(30°+\alpha-\varphi)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin(30°-\alpha+\varphi)+\sin(30°+\alpha-\varphi)=\sin(30°+\alpha+\varphi)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(\varphi-\alpha)=\sin(30°+\alpha+\varphi)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin(90°-\varphi+\alpha)-\sin(30°+\alpha+\varphi)=$$
$$=2\cos(60°+\alpha)\sin(30°-\varphi)=0;$$

таким образом, $\varphi=30°$.

76. Докажите, что если O и O_1 — центры окружностей, описанных около $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$, то $\triangle AOO_1$ подобен $\triangle ACD$.

Ответ: aR.

77. Если K — середина $\breve{AB}$, а O — центр круга, $|AB|=2R=c$, то

$$|CM|^2=|CD|^2+|DM|^2=|CD|^2+|DK|^2=$$
$$=|AD|\cdot|DB|+R^2+|DO|^2=(|OA|-|DO|)(|OB|+|DO|)+R^2+$$
$$+|DO|^2=(R-|DO|)(R+|DO|)+R^2+|DO|^2=2R^2.$$

Значит, $|CM|=R\sqrt{2}=\frac{c}{2}\sqrt{2}$.

78. Пусть KM — отрезок, параллельный BC, N и L — точки касания вписанной окружности со сторонами AC и BC. Как известно (см. задачу 18, раздел I), $|AN|=|AL|=p-a$, где p — полупериметр $\triangle ABC$. С другой стороны, $|AN|=|AL|$ — полупериметр $\triangle AKM$, подобного $\triangle ABC$. Следовательно, $\frac{p-a}{p}=\frac{b}{a}$, $p=\frac{a^2}{a-b}$.

Ответ: $\frac{2a^2}{a-b}$.

79. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то периметры отсекаемых треугольников будут $2(p-a)$, $2(p-b)$, $2(p-c)$. Следовательно, если R — радиус описанной окружности, то $R_1+R_2+R_3=\left(\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}\right)R=R$.

Ответ: $R=R_1+R_2+R_3$.

80. Если $\widehat{BAC}=\alpha$, то $|AM|=\frac{|AC|}{\sin\alpha}$, $|AN|=\frac{|AB|}{\sin\alpha}$, т. е. $|AM|:|AN|=|AC|:|AB|$; таким образом, $\triangle AMN$ подобен $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{\sin\alpha}$, поэтому $|MN|=\frac{|BC|}{\sin\alpha}=2R$.

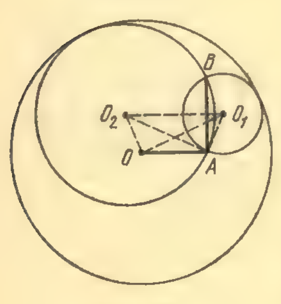


Рис. 17.

81. Пусть (рис. 17) O_1 и O_2 — центры пересекающихся окружностей. Обозначим их радиусы через x и y, $|OA|=a$. Поскольку треугольники AOO_1 и AOO_2, как следует из условия, равновелики, то, выражая их площади по формуле Герона, учитывая, что $|O_1A|=x$, $|OO_1|=R-x$,

$|O_2A|=y$, $OO_2=R-y$, найдем

$$\sqrt{\frac{(R+a)}{2}\cdot\frac{(R-a)}{2}\cdot\frac{(R+a-2x)}{2}\cdot\frac{(a+2x-R)}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(R+a)}{2}\cdot\frac{(R-a)}{2}\cdot\frac{(R+a-2y)}{2}\frac{(a+2y-R)}{2}}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a^2-(R-2x)^2=a^2-(R-2y)^2,$$

откуда, поскольку $x\neq y$, получим $x+y=R$.

82. Пусть AB и CD — данные хорды, а M — их точка пересечения.

а) Дуги $\breve{AC}$ и $\breve{BD}$ в сумме составляют полокружности; следовательно, $|AC|^2+|BD|^2=4R^2$; таким образом,

$$|AM|^2+|MC|^2+|MB|^2+|MD|^2=|AC|^2+|BD|^2=4R^2,$$

б) $|AB|^2+|CD|^2=(|AM|+|MB|)^2+(|CM|+|MD|)^2=$
$=|AM|^2+|MB|^2+|CM^2|+|MD|^2+2|AM|\cdot|MB|+2|CM|\cdot|MD|=$
$=4R^2+2(R^2-d^2)+2(R^2-d^2)=4(2R^2-d^2)$.

83. Если M — вторая точка пересечения BC с меньшей окружностью, то $|BM|=|PC|$ (M — между B и P), $|BP|=|MP|+|BM|$, $|BP|\cdot|PC|=R^2-r^2$, $|MP|^2+|PA|^2=4r^2$, $|PA|^2+|PB|^2+$
$+|PC|^2=|PA|^2+(|PB|-|PC|)^2+2|PB|\cdot|PC|=(|PA|^2+|MP|^2)+$
$+2(|PB|\cdot|PC|)=4r^2+2(R^2-r^2)=2(R^2+r^2)$.

84. Обозначим (рис. 18) длины отрезков хорд, как на рисунке, диаметр — через $2r$; используя то, что углы, опирающиеся на диаметр, прямые, а $xy=uv$, получим

$$x(x+y)+u(u+v)=x^2+xy+uv+u^2=$$
$$=(u+v)^2+x^2-v^2=(u+v)^2+m^2=4r^2.$$

85. Если α, β, γ, δ — дуги, соответствующие сторонам a, b, c и d, то доказываемое равенство соответствует тригонометрическому
$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\delta}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}$ или $\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=$
$=\sin\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)$.

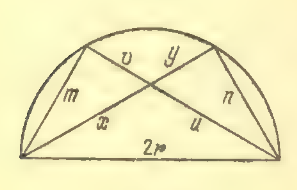


Рис. 18.

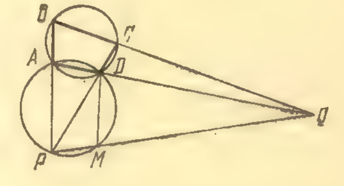


Рис. 19.

86. Пусть (рис. 19) $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Опишем около $\triangle ADP$ окружность. Обозначим через M точку пересечения этой окружности с прямой PQ. Имеем $\widehat{DMQ}=\widehat{DAP}=$
$=\widehat{BCD}$. Следовательно, четырехугольник $CDMQ$ — вписанный. Поскольку, по условию, касательные, проведенные из P и Q

к исходной окружности, равны a и b, будем иметь

$$|QM|\cdot|QP|=|QD|\cdot|QA|=b^2,$$
$$|PM|\cdot|PQ|=|PD|\cdot|PC|=a^2.$$

Сложив эти равенства, получим

$$|PQ|^2=a^2+b^2,\quad |PQ|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

87. Отрезок QM равен (см. задачу 86) $\sqrt{(b^2-R^2)+(c^2-R^2)}=$ $=\sqrt{b^2+c^2-2R^2}$. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, Q — точка пересечения AB и CD. Для нахождения длины PQ опишем окружность около $\triangle QCA$, обозначим точку пересечения QP с этой окружностью через N. Поскольку $\widehat{ANP}=\widehat{ACQ}=\widehat{ABP}$, точки A, B, N и P также лежат на одной окружности. Имеем

$$|QP|\cdot|QN|=|QA|\cdot|QB|=b^2-R^2,$$
$$|PN|\cdot|PQ|=|CP|\cdot|PA|=R^2-a^2.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$|QP|^2=b^2+a^2-2R^2.$$

Аналогично

$$|PM|^2=c^2+a^2-2R^2.$$

88. Радиус вписанной окружности заключен между величинами радиусов двух предельных случаев. Он не может быть меньше радиуса окружности, вписанной в треугольник со сторонами $a+b$, $b+c$, $c+a$, который равен S/p, где S — площадь, p — полупериметр треугольника; таким образом,

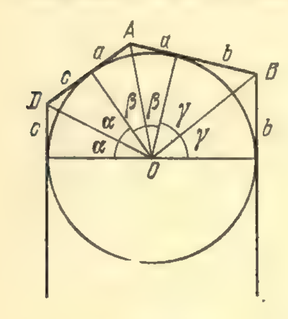


Рис. 20.

$$r>\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{(a+b+c)abc}}{a+b+c}=$$
$$=\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}.$$

С другой стороны, радиус меньше радиуса окружности, изображенной на рис. 20 (на этом рисунке противоположные касательные параллельны, точка C «убегает» в бесконечность). Поскольку для углов α, β и γ, отмеченных на рисунке, выполняется равенство $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{c}{\rho}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{a}{\rho}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{b}{\rho}$, где ρ — радиус изображенной окружности, будем иметь $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$, или $\dfrac{\frac{c}{\rho}+\frac{a}{\rho}}{1-\frac{ac}{\rho^2}}=\frac{\rho}{b}$, откуда $\rho=\sqrt{ab+bc+ca}$. Таким образом,

$$\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}<r<\sqrt{ab+bc+ca}.$$

89. Пусть M — точка пересечения прямой CB с линией центров данных окружностей. Обозначим $|AM|=x$, $\widehat{ACB}=\varphi$, $|AB|^2=2rx$, $|AC|^2=2Rx$, $\sin\varphi=\frac{x}{|AC|}$. Если ρ — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, то $\rho=\frac{|AB|}{2\sin\varphi}=\frac{|AB|\cdot|AC|}{2x}=$
$=\frac{\sqrt{2rx}\cdot\sqrt{2Rx}}{2x}=\sqrt{Rr}$.

Ответ: $\sqrt{Rr}$.

90. Пусть (рис. 21) $\widehat{O_1AO_2}=\varphi$ (O_1, O_2 — центры окружностей, A — наиболее удаленная от BC точка их пересечения). Покажем, что $\widehat{BAC}=\frac{\varphi}{2}$. $\left(\text{Для другой точки угол будет } 180°-\frac{\varphi}{2}.\right)$ В самом деле,

$$\widehat{BAC}=180°-\widehat{ABC}-\widehat{BCA}=180°-(90°-\widehat{ABO_1})-(90°-\widehat{ACO_2})=$$
$$=\widehat{ABO_1}+\widehat{ACO_2}=\widehat{BAO_1}+\widehat{CAO_2}=\widehat{O_1AO_2}-\widehat{BAC}=\varphi-\widehat{BAC}.$$

Пусть $|O_1O_2|=a$. Проведя $O_2M \parallel BC$ (M — на O_1B), получим

$$|BC|=|O_2M|=\sqrt{|O_1O_2|^2-|O_1M|}=\sqrt{a^2-(R-r)^2}.$$

Из $\triangle O_1AO_2$ найдем $\cos\varphi=\frac{R^2+r^2-a^2}{2Rr}$; таким образом, радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен

$$\frac{|BC|}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sqrt{a^2-(R-r)^2}}{2\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}}=\frac{\sqrt{a^2-(R-r)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{R^2+r^2-a^2}{2Rr}}}=\sqrt{Rr}.$$

Ответ: $\sqrt{Rr}$ (для обоих треугольнико).

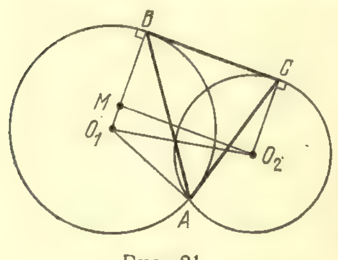


Рис. 21.

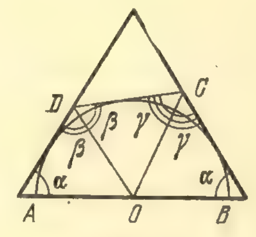


Рис. 22.

91. DO и CO — биссектрисы углов ADC и DCB. Обозначим через α, β и γ величины соответствующих углов (рис. 22). Но $\alpha+2\beta+2\gamma+\alpha=2\pi$, значит, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$; отсюда следует, что $\widehat{DOA}=\gamma$, $\widehat{COB}=\beta$ и $\triangle AOD$ подобен $\triangle COB$, откуда

$$\frac{|AD|}{|AO|}=\frac{|OB|}{|CB|},\quad |AD|\cdot|CB|=|AO|\cdot|OB|=\frac{|AB|^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{a^2}{4b}$.

92. Из условия задачи следует, что биссектрисы углов C и D пересекаются на стороне AB. Обозначим эту точку пересечения через O. Опишем около $\triangle DOC$ окружность. Пусть K — вторая точка пересечения этой окружности с AB. Имеем

$$\widehat{DKA}=\widehat{DCO}=\frac{1}{2}\widehat{DCB}=\frac{1}{2}(180°-\widehat{DAK})=\frac{1}{2}(\widehat{DKA}+\widehat{ADK}).$$

Значит, $\widehat{DKA}=\widehat{ADK}$ и $|AD|=|AK|$. Аналогично $|BC|=|BK|$; следовательно, $|AD|+|CB|=|AD|$, $b+|CB|=a$.

Ответ: $a-b$.

93. Пусть P — точка пересечения прямой DE с AB, K — точка на AB такая, что $KD \parallel AC$. $\triangle AKD$ — равнобедренный ($\widehat{KDA}=\widehat{DAC}=\widehat{DAK}$). Значит, KD — медиана в прямоугольном треугольнике и $|MN|=\frac{1}{2}|KD|=\frac{1}{4}|AP|=\frac{1}{4}|AE|=\frac{1}{4}a$.

94. Пусть (рис. 23) второй точкой пересечения окружностей, описанных около $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$, будет A_1. Из условия следует, что $|BB_1|=|CC_1|$, кроме того, $\widehat{ABA_1}=\widehat{ACA_1}$ и $\widehat{AB_1A_1}=\widehat{AC_1A_1}$. Следовательно, $\triangle A_1BB_1=\triangle A_1C_1C$. Значит, $|A_1B|=|A_1C|$. Пусть $\widehat{ABC}=\beta$, $\widehat{ACB}=\gamma$, $\widehat{ABA_1}=\widehat{ACA_1}=\varphi$. Так как

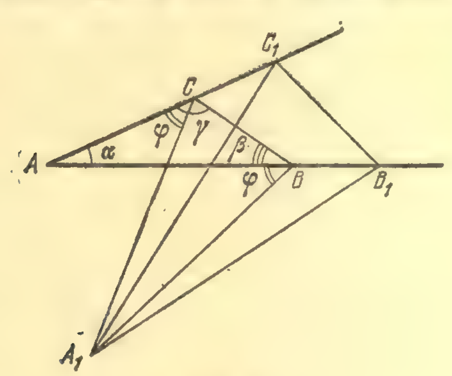


Рис. 23.

$\triangle A_1BC$ равнобедренный, то $\widehat{A_1BC}=\widehat{A_1CB}$, т. е. $\beta+\varphi=\gamma-\varphi$, $\varphi=\frac{\gamma-\beta}{2}$ и, если радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен R, то $|AA_1|=2R\sin\frac{\gamma-\beta}{2}$; но $a=|AB|-|AC|=2R(\sin\gamma-\sin\beta)=4R\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=2|AA_1|\sin\frac{\alpha}{2}$, следовательно, $|AA_1|=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

95. Заметим, что точки A, O, M, B лежат на одной окружности ($\widehat{AMB}$ измеряется полусуммой дуги $\breve{AB}$ и дуги, симметричной $\breve{AB}$ относительно OC, т. е. $\widehat{AMB}=\widehat{AOB}$). Далее, отложим $|MK|=|MB|$ на AM, тогда $\triangle AKB$ подобен $\triangle OMB$.

Ответ: $|AB|=2a$.

96. Пусть $|AB|=2r$, $|BC|=2R$, O_1 — середина AB, O_2 — середина BC, O_3 — середина AC, O — центр четвертой окружности, радиус которой x. Из условия следует, что $|O_1O_3|=R$, $|O_3O_2|=r$, $|O_1O|=r+x$, $|O_2O|=R+x$, $|O_3O|=R+r-x$. Приравнивая выражения для площадей треугольников O_1OO_3 и O_1OO_2, полученные по формуле Герона и как полупроизведение соответствующего основания на высоту, получим два уравнения:

$$\begin{cases} \sqrt{(R+r)\,r\,(R-x)\,x}=\dfrac{1}{2}Rd, \\ \sqrt{(R+r+x)\,Rrx}=\dfrac{1}{2}(R+r)\,d. \end{cases}$$

Возводя уравнения в квадрат и вычитая одно из другого, найдем $x=\dfrac{d}{2}$.

Ответ: $\dfrac{d}{2}$.

97. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из N на прямую MB; тогда $|MP|=R\cos\alpha$, следовательно, $|MP|$ равно расстоянию от центра O до AB, но расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны, т. е. $|MP|=\dfrac{1}{2}|MK|$.

Отсюда следует, что если M находится на большей из дуг, т. е. $\widehat{AMB}=\alpha$, то $|MK|=R$; если же $\widehat{AMB}=180°-\alpha$ (т. е. M — на меньшей дуге окружности), то $|NK|^2=R^2+4R^2\cos^2\alpha+4R^2\cos^2\alpha=R^2(1+8\cos^2\alpha)$.

Ответ: $|MK|=\begin{cases} R, \text{ если } M \text{ — на большей дуге окружности,} \\ R\sqrt{1+8\cos^2\alpha}, \text{ если } M \text{ — на меньшей дуге окружности.} \end{cases}$

98. Пусть ABC — данный треугольник, CD — высота, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в $\triangle ACD$ и $\triangle BDC$, K и L — точки пересечения прямых DO_1 и DO_2 с AC и CB. Так как $\triangle ADC$ подобен $\triangle CDB$, а KD и LD — биссектрисы прямых углов этих треугольников, то O_1 и O_2 делят соответственно KD и LD в одинаковом отношении. Значит, $KL \parallel O_1O_2$. Но четырехугольник $CKDL$ — вписанный ($\widehat{KCL}=\widehat{KDL}=90°$). Следовательно, $\widehat{CKL}=\widehat{CDL}=\dfrac{\pi}{4}$, $\widehat{CLK}=\widehat{CDK}=\dfrac{\pi}{4}$. Таким образом, прямая O_1O_2 образует с катетами углы в $\dfrac{\pi}{4}$. Если M и N — точки пересечения

O_1O_2 с CB и AC, то $\triangle CMO_2 = \triangle CDO_2$ $\Big(CO_2$ — общая, $\widehat{O_2CD} = \widehat{O_2CM}$, $\widehat{CDO_2} = \frac{\pi}{4} = \widehat{CMO_2}\Big)$. Значит, $|CM| = |NC| = h$.

Ответ: площадь треугольника равна $\frac{h^2}{2}$, углы $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$.

99. Обозначения понятны из рис. 24. $CKDL$ — прямоугольник. Поскольку $\widehat{LKA} = 90° + \alpha$, $\widehat{LBA} = 90° - \alpha$, то четырехугольник $BLKA$ — вписанный,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|LC|}{|CA|} = \frac{h\cos\alpha}{\frac{h}{\sin\alpha}} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha. \qquad (1)$$

Если R — радиус окружности, то

$$R = \frac{|KL|}{2\sin\varphi} = \frac{h}{2\sin\varphi}. \qquad (2)$$

Поскольку $\widehat{LOK} = 2\varphi$, то $|ON| = R\cos\varphi = \frac{h}{2\operatorname{tg}\varphi} = \frac{h}{\sin 2\alpha}$ (использовались равенства (1) и (2)),

$$|OM| = |ON|\sin(90° - 2\alpha) = h\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = h\operatorname{ctg} 2\alpha$$

и, наконец,

$$\frac{1}{2}|PQ| = |QM| = \sqrt{R^2 - |OM|^2} = \sqrt{\frac{h^2}{4\sin^2\varphi} - h^2\operatorname{ctg}^2 2\alpha} =$$

$$= h\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \operatorname{ctg}^2\varphi) - \operatorname{ctg}^2 2\alpha} = h\sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{\sin^2 2\alpha}\right) - \operatorname{ctg}^2 2\alpha} =$$

$$= h\sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{h\sqrt{5}}{2}, \qquad |PQ| = h\sqrt{5}.$$

Если теперь отрезки $|PD|$ и $|DQ|$ хорды обозначить через x и y, то $x + y = h\sqrt{5}$, $xy = h^2$, откуда найдем, что искомые отрезки хорды будут равны $\frac{\sqrt{5}+1}{2}h$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}h$.

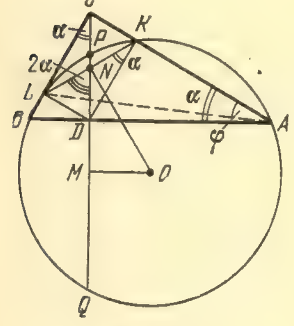


Рис. 24.

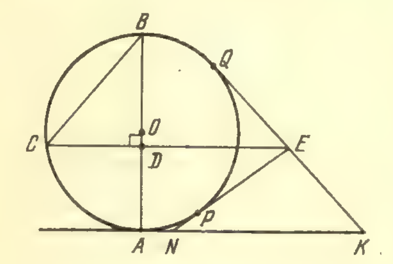


Рис. 25.

100. Пусть (рис. 25) P и Q — точки касания касательных, проведенных из E. Докажем, что $|EP| = |EQ| = |BD|$. В самом

деле,

$$|EP|^2=(|ED|+|DC|)(|ED|-|DC|)=$$
$$=|ED|^2-|DC|^2=|BC|^2-|DC|^2=|BD|^2$$

(по условию $|ED|=|BC|$). Обозначим

$$|KN|=x,\quad |PN|=|NA|=y,\quad |EQ|=|EP|=|BD|=z.$$

Тогда $|KE|=x+y-z$. Имеем

$$S_{KEN}=\frac{1}{2}|KN|\cdot|DA|=\frac{1}{2}x(2R-z),$$

с другой стороны,

$$S_{KEN}=S_{KON}+S_{EOK}-S_{EON}=$$
$$=\frac{1}{2}R[x+x+y-z-y-z]=R(x-z)$$

(O — центр окружности). Таким образом, $\frac{1}{2}x(2R-z)=R(x-z)$, $x=2R$.

Ответ: $2R$.

101. Заметим, что если мы рассмотрим систему из n векторов, имеющих начало в центре правильного n-угольника, а концы в его вершинах, то сумма этих векторов равна нулю. В самом деле, если мы повернем все эти векторы на угол $2\pi/n$, то их сумма не изменится, а, с другой стороны, вектор, равный их сумме, повернется на этот же угол. Значит, и сумма проекций этих векторов на любую ось равна нулю.

Вернемся к нашей задаче. Если φ — угол между данной прямой (обозначим ее через l) и одним из векторов, то остальные векторы будут образовывать углы $\varphi+\frac{2\pi}{n}$, $\varphi+2\frac{2\pi}{n}$, ..., $\varphi+(n-1)\frac{2\pi}{n}$. Квадрат расстояния от k-й вершины до l будет

$$\sin^2\left(\varphi+k\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{1-\cos\left(2\varphi+k\frac{4\pi}{n}\right)}{2}.$$

Но величины $\cos\left(2\varphi+k\frac{4\pi}{n}\right)$ можно рассматривать как проекции на l системы n векторов, образующие с l углы $2\varphi+k\frac{4\pi}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. При n нечетном эти векторы образуют правильный n-угольник, при n четном будет дважды повторенный $n/2$-угольник.

Ответ: $n/2$.

102. Пусть O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, B_1 — середина AC, N — точка касания с AC вписанной окружности; тогда, если $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$, то $|AN|=p-a$, $|CN|=p-c$ (см. задачу 18, раздел I)

$$|ON|^2=|OB_1|^2+|B_1N|^2=$$
$$=(|AO|^2-|AB_1|^2)+|B_1N|^2=R^2-\frac{b^2}{4}+\left(p-a-\frac{b}{2}\right)^2=$$
$$=R^2+(p-a)(p-a-b)=R^2-(p-a)(p-c).$$

Аналогично определив квадраты расстояний до других точек касания и сложив их, получим, что искомая сумма равна

$$3R^2-(p-a)(p-c)-(p-a)(p-b)-(p-b)(p-c)=3R^2-M.$$

Воспользовавшись для площади треугольника следующими формулами: формулой Герона и формулами $S=pr$, $S=\frac{abc}{4R}$, получим

$$\begin{cases} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr \\ pr=\frac{abc}{4R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \\ 4Rr=\frac{abc}{p}. \end{cases}$$

Сложив последние равенства и воспользовавшись тождеством

$$(p-a)(p-b)(p-c)+abc=$$
$$=p[(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)]=pM,$$

найдем, что $M=4Rr+r^2$.

Ответ: $3R^2-4Rr-r^2$.

103. Пусть (рис. 26) P — точка пересечения диагоналей, а K, L, M, N — основания перпендикуляров, опущенных из P на AB, BC, CD и DA. Так как четырехугольник $PKBL$ вписанный, то $\widehat{PKL}=\widehat{PBC}$, аналогично $\widehat{PKN}=\widehat{PAD}$; но $\widehat{PBC}=\widehat{PAD}$, так как они опираются на одну дугу. Следовательно, KP — биссектриса угла NKL; значит, биссектрисы углов четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P, которая и является центром вписанной в $KLMN$ окружности. Пусть теперь диагонали AC и BD перпендикулярны, R — радиус данной окружности, d — расстояние от P до ее центра. $|AP|\cdot|PC|=R^2-d^2$. Радиус искомой окружности r равен, в частности, расстоянию от P до KL. Обозначив $\widehat{KLP}=\widehat{ABP}=\alpha$, $\widehat{PBC}=\beta$, найдем

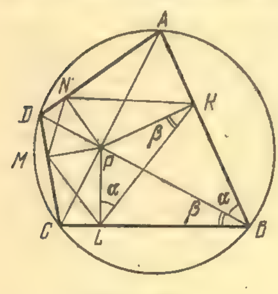


Рис. 26.

$$r=|PL|\sin\alpha=|PB|\sin\beta\sin\alpha=|PB|\frac{|PC|}{|BC|}\frac{|AP|}{|AB|}=$$
$$=(R^2-d^2)\frac{|PB|\cdot|AC|}{|BC|\cdot|AB|\sin(\alpha+\beta)}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|AC|}=$$
$$=(R^2-d^2)\frac{2S_{ABC}}{2S_{ABC}}\frac{1}{2R}=\frac{R^2-d^2}{2R}.$$

Ответ: $\frac{R^2-d^2}{2R}$.

104. Пусть (рис. 27) $ABCD$ — данный четырехугольник, P — точка пересечения диагоналей, K — середина BC, L — середина AD. Докажем, что прямая LP перпендикулярна BC. Обозначив через M точку пересечения LP с BC, будем иметь $\widehat{BPM}=\widehat{LPD}=$ $=\widehat{ADP}=\widehat{PCB}$. Следовательно, $PM\perp BC$. Значит, $OK\parallel LP$. Ана-

логично $PK \parallel LO$, и $KOLP$ — параллелограмм,

$$|LK|^2+|PO|^2=2(|LP|^2+|PK|^2)=$$

$$=2\left(\frac{|AD|^2}{4}+\frac{|BC|^2}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot 4R^2=2R^2.$$

(Если хорды AD и BC переместить так, чтобы они имели общий конец, а соответствующие дуги продолжали одна другую, то образуется прямоугольный треугольник с катетами $|AD|$ и $|BC|$ и диаметром $2R$, значит, $|AD|^2+|BC|^2=4R^2$.) Следовательно, $|LK|^2=2R^2-d^2$ и точки L и K лежат на окружности с центром S в середине PO и радиусом $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-d^2}$. Но $\triangle LMK$ — прямоугольный, MS — медиана, $|MS|=\frac{1}{2}|LK|=\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-d^2}$, т. е. M лежит на той же окружности.

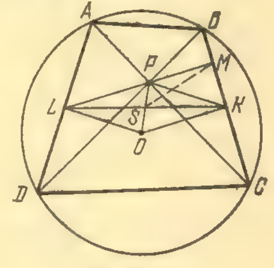


Рис. 27.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-d^2}$.

105. Из двух предыдущих задач следует, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то проекции точки пересечения диагоналей этого четырехугольника на его стороны служат вершинами четырехугольника, который можно вписать в окружность и около которого можно описать окружность, причем радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами полностью определяются радиусом окружности, описанной около исходного четырехугольника, и расстоянием от ее центра до точки пересечения диагоналей вписанного в нее четырехугольника. Следовательно, при вращении диагоналей исходного четырехугольника вокруг точки их пересечения четырехугольник, образованный проекциями этой точки, будет вращаться, оставаясь вписанным в одну и ту же окружность и описанным около одной и той же окружности. Легко также показать, учитывая выражения для радиусов вписанной и описанной окружностей, полученные в двух предыдущих задачах, что предлагаемое к доказательству соотношение для таких четырехугольников выполняется.

Для завершения доказательства нам осталось доказать, что любой «вписано-описанный» четырехугольник может быть получен из вписанного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями вышеуказанным способом. В самом деле, если $KLMN$ — «вписано-описанный» четырехугольник, P — центр вписанной окружности, то, проведя прямые, перпендикулярные биссектрисам KP, LP, MP, NP и проходящие через K, L, M и N соответственно, мы получим четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 26). При этом $\widehat{BPK}=\widehat{KLB}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{MLK}$ (мы воспользовались, в частности, тем, что у четырехугольника $PKBL$ противоположные углы прямые и, следовательно, он вписанный). Аналогично $\widehat{KPA}=\widehat{KNA}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{MNK}$, и, значит, $\widehat{BPA}=\widehat{BPK}+\widehat{KPA}=$

$= 180° - \frac{1}{2}(\widehat{MLK} + \widehat{MNK}) = 90°$. Таким образом, все углы BPA, APD, DPC и CPB прямые, т. е. P — точка пересечения диагоналей $ABCD$, сами же диагонали перпендикулярны. Нетрудно показать, что $ABCD$ — вписанный четырехугольник, поскольку $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \widehat{PBL} + \widehat{PBK} + \widehat{PDN} + \widehat{PDM} = \widehat{PKL} + \widehat{PLK} + \widehat{PMN} + \widehat{PNM} = \frac{1}{2}(\widehat{NKL} + \widehat{KLM} + \widehat{LMN} + \widehat{MNK}) = 180°$.

106. а) Пусть l пересекает AC и BC в точках K и N и касается окружности в точке M (рис. 28). Обозначим $|AC| = |BC| = a$, $|AK| = |KM| = x$, $|BN| = |NM| = y$. Очевидно, $\frac{w^2}{uv} = \frac{(a-x)(a-y)}{xy}$, но по теореме косинусов для $\triangle CKN$

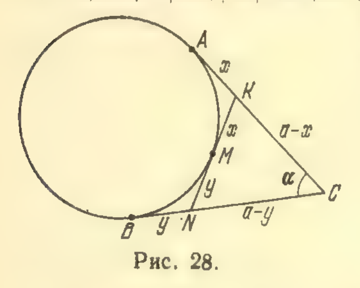


Рис. 28.

$$(x+y)^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2 - 2(a-x)(a-y)\cos\alpha \Rightarrow xy = a^2 - ax - ay - (a-x)(a-y) \times \cos\alpha \Rightarrow 2xy = (a-x)(a-y)(1-\cos\alpha) \Rightarrow \frac{xy}{(a-x)(a-y)} = \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, $\frac{uv}{w^2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$. (Аналогично рассматриваются другие случаи расположения прямой l.)

б) Воспользуемся результатом задачи 106 а). Перемножая соответствующие равенства для всех углов n-угольника, мы получим квадрат искомого отношения, а само отношение окажется равным

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\ldots\sin\frac{\alpha_n}{2}},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — углы многоугольника.

в) Воспользуемся результатом задачи 106 а). Если обозначим точки касания сторон $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}, A_{2n}A_1$ с окружностью через $B_1, B_2, \ldots, B_{2n-1}, B_{2n}$, через $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ — расстояния от $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ до l, через $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ — расстояния от $B_1, B_2, \ldots, B_{2n}$ до l, то получим

$$\frac{x_1^2}{y_{2n}y_1} = \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha_1}{2}}, \quad \frac{x_2^2}{y_1y_2} = \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha_2}{2}}, \ldots, \frac{x_{2n}^2}{y_{2n-1}y_{2n}} = \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha_{2n}}{2}}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ — углы многоугольника). Перемножая равенства, содержащие $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$, и деля на произведение остальных равенств, получим

$$\left(\frac{x_1x_2\ldots x_{2n-1}}{x_2x_4\ldots x_{2n}}\right)^2 = \left(\frac{\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_4}{2}\ldots\sin\frac{\alpha_{2n}}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3}{2}\ldots\sin\frac{\alpha_{2n-1}}{2}}\right)^2.$$

107. Найдем сначала $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{|AO|}{|OC|}$. Обозначим $\hat{C} = \beta$. Имеем

$$\frac{|AO|}{|OC|} = \frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2} ab \sin \alpha}{\frac{1}{2}(p-a)(p-b)\sin \beta}. \qquad (1)$$

Но по теореме косинусов

$$|BD|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$|BD|^2 = (p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b)\cos \beta,$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = (p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b)\cos\beta,$$

$$\cos\beta = \frac{p(p-a-b) + ab\cos\alpha}{(p-a)(p-b)},$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{(1-\cos\beta)(1+\cos\beta)} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab(1-\cos\alpha)(2p^2 - 2ap - 2bp + ab + ab\cos\alpha)}}{(p-a)(p-b)}. \qquad (2)$$

Учитывая, что при $\alpha \to 0$

$$\cos\alpha \to 1, \quad \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} \to \sqrt{2},$$

получим из (1), (2)

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{|AO|}{|OC|} = \sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}.$$

Поскольку $|AC| \to p$, то

$$\lim_{\alpha\to 0} |AO| = p\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab} + \sqrt{(p-a)(p-b)}}.$$

108. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот треугольника относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности.

109. Докажите, что касательные к окружности, проведенные из вершин, между которыми расположена одна вершина многоугольника, равны. Отсюда следует, что для многоугольника с нечетным числом сторон точки касания являются серединами сторон.

110. $|MB|^2 = a^2 + c^2\cos^2\hat{A} = a^2 + c^2 - c^2\sin^2\hat{A} = a^2 + c^2 - a^2 \times$ $\times \sin^2\hat{C} = c^2 + a^2\cos^2\hat{C} = |NB|^2$.

111. Если O — точка пересечения диагоналей AC и BD, то, воспользовавшись подобием соответствующих треугольников, получим

$$\frac{|OK|}{|OC|} = \frac{|OK|}{|OB|}\cdot\frac{|OB|}{|OC|} = \frac{|OA|}{|OD|}\cdot\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM|}{|OD|},$$

что и требовалось.

112. Докажите, что l образует с AD такие же углы, что и прямая BC, касающаяся нашей окружности. Отсюда следует, что другая касательная к окружности, проходящая через D, будет параллельна l.

113. Построим окружность (рис. 29), касающуюся прямых MN, AC и BC таким образом, чтобы точки касания P и Q с прямыми AC и BC были вне отрезков CM и CN (это будет окружность, вневписанная в треугольник MCN). Если R — точка касания MN с окружностью, то $|MP|=|MR|$, $|NQ|=|NR|$, следовательно, $|MN|=|MP|+|NQ|$, но по условию $|MN|=|MA|+|NB|$. Таким образом, одна из точек P или Q (на рисунке P) лежит внутри соответствующей стороны, а другая — на продолжении. При этом

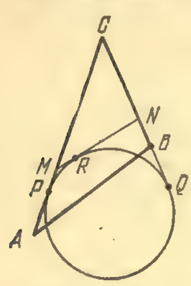


Рис. 29.

$$|CP|=|CQ|=\frac{1}{2}(|CP|+|CQ|)=$$
$$=\frac{1}{2}(|AC|+|CB|),$$

т. е. построенная окружность постоянна для всех прямых MN.

114. Если O — центр круга, описанного около ABC, D — середина CB, H — точка пересечения высот, L — середина AH, то $|AL|=|OD|$, и, поскольку $AL \parallel OD$, значит, OL делит AD пополам, т. е. L симметрична O относительно середины AD.

115. Пусть BD — высота треугольника, причем $|BD|=R\sqrt{2}$, где R — радиус описанного круга, K и M — основания перпендикуляров, опущенных из D на AB и BC, O — центр описанного круга. Если угол C острый, то $\widehat{KBO}=90°-\hat{C}$. Поскольку четырехугольник $BMDK$ вписанный, то $\widehat{MKD}=\widehat{DBM}=90°-\hat{C}$, значит, $\widehat{MKB}=180°-90°-(90°-\hat{C})=\hat{C}$, следовательно, $BO \perp KM$. Но

$$S_{BKM}=2\left(\frac{|BD|}{2}\right)^2 \sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}=$$
$$=R^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}=\frac{1}{2}S_{ABC}.$$

(Мы воспользовались формулой $S=2R^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$.) С другой стороны, если h_1 — высота $\triangle BKM$, проведенная из вершины B, то $\frac{1}{2}S=\frac{1}{4}|AC|\cdot|BD|=S_{BKM}=\frac{1}{2}|KM|h_1=\frac{1}{2}|BD|\sin\hat{B}\cdot h_1$, значит, $h_1=\frac{|AC|}{2\sin\hat{B}}=R$; учитывая, что $BO \perp KM$, получаем, что точка O лежит на KM.

116. Заметим, что $\triangle ADK$ подобен $\triangle ABK$, поскольку

$$|AK|^2=|AC|^2=|AD|\cdot|AB|, \text{ т. е. } \frac{|AK|}{|AD|}=\frac{|AB|}{|AK|}.$$

Если O — центр окружности, описанной около $\triangle ABK$, то

$$\widehat{OAD}+\widehat{ADK}=90°-\widehat{AKB}+\widehat{ADK}=90°$$

(предполагалось, что $\widehat{AKB}$ острый; если $\widehat{AKB}$ тупой, то рассуждения аналогичны).

117. Докажите, что прямая, параллельная BC и проходящая через E, делит биссектрису угла A в том же отношении, в каком ее делит биссектриса угла C.

118. Если O — вершина угла, A — точка на биссектрисе, B_1 и B_2 — точки пересечения со сторонами угла одной окружности, C_1 и C_2 (B_1 и C_1 — на одной стороне) — точки пересечения другой окружности, то $\triangle AB_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

119. Пусть F и D — точки пересечения EN и EM соответственно с AB и BC. Докажем, что $\triangle AFN$ и $\triangle MDC$ подобны. Используя подобия различных треугольников и равенство противоположных сторон параллелограмма, будем иметь

$$\frac{|NF|}{|FA|} = \frac{|NF|}{|FB|} \cdot \frac{|FB|}{|FA|} = \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|ED|}{|FA|} =$$

$$= \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|DC|}{|FE|} = \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|DC|}{|DM|},$$

т. е. $\triangle AFN$ подобен $\triangle MDC$.

120. Рассмотрите параллелограммы $ABMK$ и $DCML$ и докажите, что KL делит DA в том же отношении, что и точка N, и прямая MN является биссектрисой угла KML.

121. Докажем сначала, что диагонали данного четырехугольника делятся в точке пересечения пополам, т. е. что четырехугольник — параллелограмм. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, O — точка пересечения диагоналей. Допустим, что $|BO| < |OD|$, $|AO| \leqslant |OC|$; рассмотрим $\triangle OA_1B_1$, симметричный $\triangle OAB$ относительно точки O; очевидно, радиус окружности, вписанной в $\triangle OA_1B_1$, меньше радиуса окружности, вписанной в $\triangle OCD$, а по условию они равны.

Итак, O есть середина обеих диагоналей. Докажем, что все стороны четырехугольника равны. Воспользуемся формулой $S = pr$ (s — площадь, p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности треугольника). Поскольку у $\triangle ABO$ и $\triangle BOC$ площади и радиусы вписанных окружностей равны, то равны и их периметры, т. е. $|AB| = |BC|$.

122. Аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче, докажите, что диагонали четырехугольника делятся пополам точкой пересечения.

123. Из условия задачи следует, что $ABCD$ (рис. 30) — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим параллелограмм ACC_1A_1, у которого стороны AA_1 и CC_1 равны и параллельны диагонали BD. Треугольники ADA_1, CDC_1 и C_1DA_1 равны соответственно треугольникам ABD, BCD и ABC. Следовательно, отрезки соединяющие D с вершинами A, C, C_1, A_1, делят параллелограмм на 4 треугольника, у которых равны радиусы вписанных окружностей. Если O — точка пересечения диагоналей параллелограмма ACC_1A_1, то D должна совпадать с O (если D, например, внутри $\triangle COC_1$, то радиус окружности, вписанной в $\triangle ADA_1$, больше радиуса окружности, вписанной в $\triangle AOA_1$ и тем более в $\triangle CDC_1$). Таким образом,

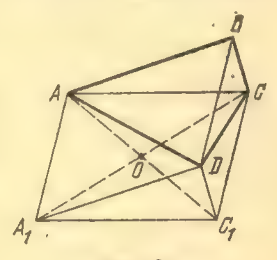


Рис. 30.

$ABCD$ — параллелограмм, но, кроме того, из задачи 121 следует, что ACC_1A_1 — ромб, т. е. $ABCD$ — прямоугольник.

124. Если KN — перпендикуляр из K на AB, $\widehat{CAB}=\alpha$, то

$$\frac{|KN|}{|OM|}=\frac{|AK|}{|AO|}=\frac{|AO|-|KO|}{|AO|}=$$

$$=\frac{|AO|-2|OM|\sin\frac{\alpha}{2}}{|AO|}=\frac{|AO|-2|AO|\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{|AO|}=$$

$$=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha=\frac{|CD|}{|CB|}.$$

Поскольку $\triangle ACB$ и $\triangle ACD$ подобны, то из предыдущего следует, что $|KN|$ равна радиусу окружности, вписанной в $\triangle ACD$, а так как K лежит на биссектрисе угла A, то K — центр окружности, вписанной в $\triangle ACD$. Аналогично доказательство для L.

125. Докажите, что $\triangle ABP=\triangle ACQ$. Для этого нужно доказать, что $\triangle KBP=\triangle ABC$ и $\triangle FCQ=\triangle ABC$ (по двум сторонам и углу между ними):

$$\widehat{QAP}=\widehat{CAB}+\widehat{CAQ}+\widehat{BAP}=\widehat{CAB}+\widehat{CAQ}+\widehat{CQA}=$$

$$=\widehat{CAB}+180^\circ-\widehat{QCA}=\widehat{CAB}+90^\circ-\widehat{QCF}=90^\circ.$$

(Предполагалось, что $\widehat{CAB}\leqslant 90^\circ$. Рассуждения в случае $\widehat{CAB}>90^\circ$ аналогичны.)

126. Поскольку $\widehat{FE_1E}=\widehat{FCE}=90^\circ$, четырехугольник FE_1EC — вписанный, $\widehat{FCE_1}=\widehat{FEE_1}=60^\circ$. Аналогично, вписанным является четырехугольник FE_1AD и $\widehat{E_1DF}=\widehat{E_1AF}=60^\circ$, т. е. $\triangle DE_1C$ — правильный. Точно так же доказывается, что правильным является $\triangle BF_1C$.

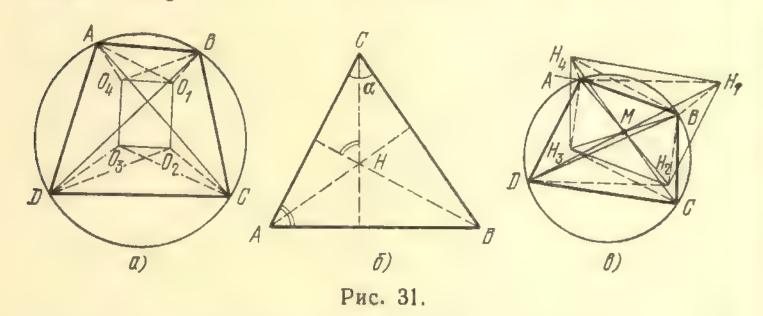


Рис. 31.

127. 1. Заметим, что если O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то $\widehat{BOC}=90^\circ+\frac{1}{2}\hat{A}$. В самом деле, $\widehat{BOC}=$ $=180^\circ-\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})=90^\circ+\frac{1}{2}\hat{A}$. Поскольку $\widehat{BO_1A}=\widehat{BO_4A}$, четырехугольник ABO_1O_4 является вписанным (рис. 31, a), следова-

тельно, внешний угол к $\widehat{BO_1O_4}$ равен $\widehat{BAO_4}=\frac{1}{2}\widehat{BAD}$. Аналогично, угол, внешний к $\widehat{BO_1O_2}$, равен $\frac{1}{2}\widehat{BCD}$. Но $\frac{1}{2}(\widehat{BAD}+\widehat{BCD})=90°$, значит, $\widehat{O_4O_1O_2}=90°$.

2. Для доказательства второй части покажем сначала, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот полностью определяется величиной угла при этой вершине и длиной противоположной стороны, а именно (рис. 31, *б*):

$$|CH|=|CB|\frac{\cos\alpha}{\sin\widehat{CAB}}=\frac{|AB|}{\sin\alpha}\cos\alpha=|AB|\operatorname{ctg}\alpha.$$

Поскольку четырехугольник вписанный, $|AH_3|=|BH_2|$ и $AH_3\parallel BH_2$; значит, ABH_2H_3 — параллелограмм.

Таким образом, точка пересечения AH_2 и BH_3 делит AH_2 и BH_3 пополам. Рассматривая другие параллелограммы, получим, что все отрезки H_2A, H_3B, H_4C, H_1D пересекаются в одной точке M и делятся в ней пополам, т. е. четырехугольники $ABCD$ и $H_1H_2H_3H_4$ центрально симметричны относительно точки M (рис. 31, *в*).

128. Если стороны треугольника ABC, противолежащие вершинам A, B и C, равны соответственно a, b и c, а углы $\widehat{ADB}$, $\widehat{BDC}$ и $\widehat{CDA}$ равны α, β и γ (считаем, что $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$), то расстояния от точки D до точек пересечения высот треугольников ADB, BDC и CDA равны абсолютным значениям величин $c\operatorname{ctg}\alpha$, $a\operatorname{ctg}\beta$, $b\operatorname{ctg}\gamma$ (см. решение задачи 127). Нетрудно убедиться, что площадь треугольника с вершинами в точках пересечения высот $\triangle ADB$, $\triangle BDC$ и $\triangle CDA$ будет равна

$$\frac{1}{2}c\operatorname{ctg}\alpha\cdot a\operatorname{ctg}\beta\cdot\sin\hat{B}+\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\beta\cdot b\operatorname{ctg}\gamma\cdot\sin\hat{C}+$$
$$+\frac{1}{2}b\operatorname{ctg}\gamma\cdot c\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\hat{A}=\frac{1}{2}S_{ABC}(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+$$
$$+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{1}{2}S_{ABC},$$

поскольку выражение в скобках равно 1. (Докажите это, учитывая, что $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.) Аналогично рассматривались другие случаи расположения точки D (когда один из углов α, β, γ равен сумме двух других).

129. Обозначим (рис. 32) через O точку пересечения AM и DC. Проведем через B касательную ко второй окружности и обозначим точку пересечения ее с AC через K (как и в условии). Очевидно, что утверждение задачи эквивалентно утверждению, что $KO\parallel CM$. Пусть угол, опирающийся на $\smile AB$, в первой окружности равен α, во второй β; тогда

$$\widehat{BCM}=\widehat{BAC},\quad \widehat{BDM}=\widehat{BAD},$$
$$\widehat{DMC}=180°-\widehat{BDM}-\widehat{BCM}=180°-\widehat{BAD}-\widehat{BAC}=180°-\widehat{DAC},$$

следовательно, $ADMC$ — вписанный четырехугольник, $\widehat{AMC}=\beta$.

Далее, если касательная BK пересекает DM в точке L, то $\widehat{KBO}=$ $=\widehat{LBD}=\widehat{BDL}=\widehat{CAM}$; значит, четырехугольник $KABO$ также вписанный и $\widehat{KOA}=\widehat{KBA}=\beta$, т. е. $KO \parallel CM$ (точно так же рассматриваются случаи других взаимных расположений точек D, B и C).

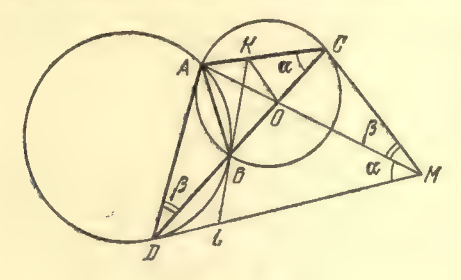


Рис. 32.

130. Обозначим через P, Q и R точки пересечения LB и AC, AN и BC, LB и AN. Пусть $|BC|=a$, $|AC|=b$. Нам достаточно показать, что $S_{ACQ}=S_{APB}$ (обе эти площади отличаются от рассматриваемых добавлением площади $\triangle APR$). Из подобия соответствующих треугольников получим $|CQ|=|PC|=\frac{ab}{a+b}$. Следовательно,

$$S_{ACQ}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|CQ|=\frac{ab^2}{2(a+b)},$$

$$S_{APB}=S_{ACB}-S_{PCB}=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}\frac{a^2b}{a+b}=\frac{ab^2}{2(a+b)},$$

что и требовалось.

131. Утверждение нашей задачи вытекает из следующих двух фактов.

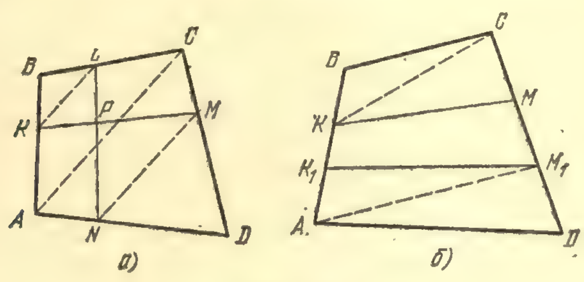


Рис. 33.

1) Если на сторонах четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N (рис, 33, a) так, что стороны AB, BC, CD и DA разделены этими точками в одинаковом отношении $\left(\frac{|BK|}{|KA|}=\frac{|CM|}{|MD|}=\right.$

$= \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AN|}{|ND|}\Big)$, то и отрезки KM и LN своей точкой пересечения разделены в том же отношении.

В самом деле, из того, что прямые KL и NM параллельны диагонали AC, следует

$$\frac{|KP|}{|PM|} = \frac{|LP|}{|PN|} = \frac{|KL|}{|NM|} = \frac{|KL|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|NM|} =$$
$$= \frac{|BK|}{|BA|} \cdot \frac{|AD|}{|ND|} = \frac{|BK|}{|BA|} \cdot \frac{|BA|}{|KA|} = \frac{|BK|}{|KA|}.$$

2) Если на сторонах AB и CD четырехугольника взяты точки K_1 и K, M_1 и M (рис. 33, *б*) так, что

$$\frac{|K_1K|}{|AB|} = \frac{|M_1M|}{|CD|} = \frac{1}{m}, \quad |AK_1| = |KB|, \quad |DM_1| = |CM|,$$

то площадь четырехугольника K_1KMM_1 составляет $\frac{1}{m}$ часть от площади четырехугольника $ABCD$. В самом деле, $S_{BKC} = \frac{|BK|}{|BA|} S_{ABC}$, $S_{AM_1D} = \frac{|M_1D|}{|CD|} S_{ACD} = \frac{|BK|}{|BA|} S_{ACD}$. Следовательно, $S_{AKCM_1} = \left(1 - \frac{|BK|}{|BA|}\right) S_{ABCD} = \frac{|AK|}{|BA|} S_{ABCD}$. Аналогично $S_{K_1KMM_1} = \frac{|K_1K|}{|AK|} S_{AKCM_1}$. Таким образом, $S_{K_1KMM_1} = \frac{|K_1K|}{|AB|} S_{ABCD} = \frac{1}{m} S$.

132. Пусть K — середина DB, L — середина AC. $S_{ANM} = S_{CNM}$ (поскольку $|AL| = |LC|$), точно так же $S_{BNM} = S_{DMN}$, отсюда следует утверждение задачи.

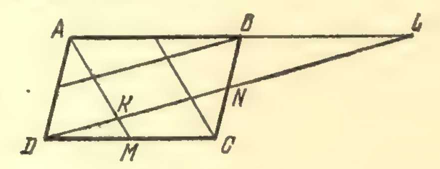


Рис. 34.

133. Если (рис. 34) M — середина DC, N — середина BC, K и L — точки пересечения DN соответственно с AM и AB, то $\frac{|KM|}{|AK|} = \frac{|DM|}{|AL|} = \frac{1}{4}$, т. е. $|AK| = \frac{4}{5}|AM|$, следовательно,

$$S_{ADK} = \frac{4}{5} S_{ADM} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} S = \frac{1}{5} S$$

(S — площадь параллелограмма). Таким образом, площадь искомой фигуры будет $S - 4S_{ADK} = S - \frac{4}{5} S = \frac{1}{5} S$.

134. Пусть (рис. 35) Q — середина AD, N — середина BC, M — середина DC, K, P, R — точки пересечения DN и AM, QC и DN, QC и AM. Тогда $|DK| = \frac{2}{5}|DN|$, $|DP| = |PN|$, $|QP| = |PC|$, $|QR| = \frac{1}{3}|QC|$, $\frac{S_{RPK}}{S_{QPD}} = \frac{|RP|}{|QP|} \cdot \frac{|KP|}{|DP|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$,

$S_{RPK} = \frac{1}{15} \cdot \frac{S}{8} = \frac{S}{120}$.

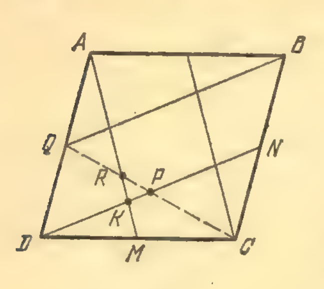


Рис. 35.

Следовательно, от четырехугольника, рассмотренного в предыдущей задаче, отрезаются четыре треугольника площади $\frac{S}{120}$; таким образом, площадь искомого восьмиугольника будет $\frac{S}{5} - \frac{4S}{120} = \frac{S}{6}$.

135. Пусть прямая HC пересекает AB и LM в точках T и N, прямая AL пересекает ED в точке K и прямая BM пересекает FG в точке P. Имеем

$$S_{ACDE} = S_{ACHK} = S_{ATNL},$$

$$S_{BCFG} = S_{BCHP} = S_{BMNT};$$

таким образом,

$$S_{ACDE} + S_{BCFG} = S_{ABML}.$$

136. Обозначим площади, как на рис. 36. Тогда $s_1 + x + s_2 = s_2 + y + s_3 = \frac{1}{2}(x + y + s_2 + Q)$. Таким образом,

$$s_1 + x + s_2 + s_2 + y + s_3 = x + y + s_2 + Q \Longrightarrow s_1 + s_2 + s_3 = Q.$$

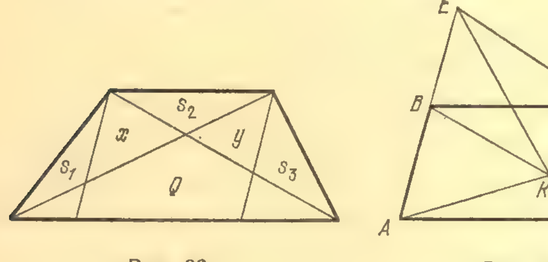


Рис. 36. Рис. 37.

137. Если (рис. 37) S — площадь параллелограмма, то $S_{ABK} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S$, с другой стороны, $S_{DEC} = S_{EKC} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S$, значит, $S_{ABK} + S_{KCD} = S_{EKC} + S_{KCF}$, т. е. $S_{ABK} = S_{EKC}$; анало-

гично $S_{AKD}=S_{KCF}$; складывая два последних равенства, получим $S_{ABKD}=S_{CEKF}$.

138. Пусть (рис. 38, *а*) O — центр описанной, а I — центр вписанной окружности. Опустим из O и I перпендикуляры на AB и BC: ON, OP, IL, IQ. Если a, b, c — длины сторон BC, AC и AB треугольника, то легко найдем $|BK|=c-b$, $|BM|=|a-b|$,

$$|BN|=\frac{c}{2},\ |BP|=\frac{a}{2},\ |BL|=|BQ|=\frac{a+c-b}{2},\quad |NL|=\frac{|a-b|}{2},$$

$|PQ|=\frac{|c-b|}{2}$ (см. задачу 18, раздел I).

Следовательно, если мы проведем через O прямые, параллельные сторонам AB и BC, до пересечения с перпендикулярами,

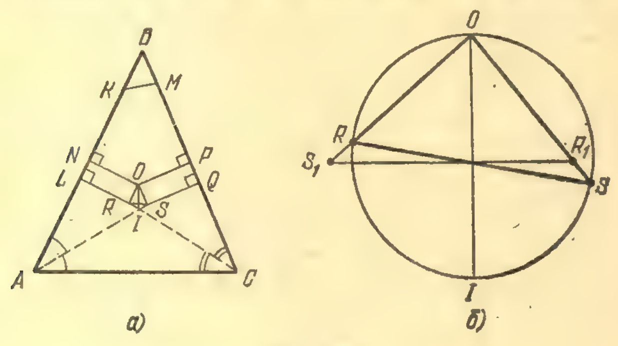


Рис. 38.

опущенными из I, получится $\triangle ORS$, подобный $\triangle BKM$ с коэффициентом 1/2. Но окружность, построенная на OI как на диаметре, является описанной для $\triangle ORS$. Следовательно, радиус окружности, описанной около $\triangle BKM$, равен $|OI|$. Для доказательства второй части задачи заметим, что если мы на прямой OS отложим $|OR_1|=|OR|$, а на OR отложим $|OS_1|=|OS|$, то прямая S_1R_1 будет параллельна KM (рис. 38, *б*), но $\widehat{OR_1S_1}+\widehat{IOR_1}=\widehat{ORS}+\widehat{IOS}=90°$, т. е. $S_1R_1\perp OI$.

139. В обозначениях предыдущей задачи, проведем через A прямую, перпендикулярную OI, обозначим через D ее точку пересечения с прямой BC. Докажите, что разность радиусов окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD, равна радиусу окружности, описанной около треугольника BKM.

140. Обозначим радиус окружности через R, а расстояния от P, Q и M до центра — через a, b и c. Тогда (см. задачу 87) $|QP|^2=a^2+b^2-2R^2$, $|QM|^2=b^2+c^2-2R^2$, $|PM|^2=c^2+a^2-2R^2$. Если O — центр окружности, то для того, чтобы QO было перпендикулярно PM, необходимо и достаточно условие

$$|QP|^2-|QM|^2=|PO|^2-|OM|^2$$

или

$$(a^2+b^2-2R^2)-(b^2+c^2-2R^2)=a^2-c^2.$$

Аналогично проверяется перпендикулярность других отрезков.

141. а) Рассмотрим четырехугольник $ABCD$; пусть K и L — точки касания окружностей, вписанных в $\triangle ABC$ и в $\triangle ACD$, с прямой AC. Тогда (см. задачу 18, раздел I)

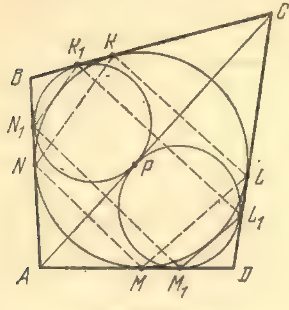


Рис. 39.

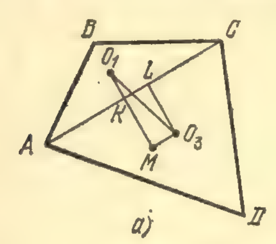
$$|KL| = ||AL| - |AK|| = \frac{1}{2}|(|AB| + |AC| - |BC|) - (|AD| + |AC| - |CD|)| = \frac{1}{2}||AB| + |CD| - |AD| - |BC||.$$

Но если $ABCD$ — описанный четырехугольник, то $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ и $|KL| = 0$.

б) Если K, L, M, N — точки касания со сторонами четырехугольника вписанной окружности, а K_1, L_1, M_1, N_1 — точки касания окружностей, вписанных в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ (рис. 39), то $N_1K_1 \parallel NK$, $M_1L_1 \parallel ML$.

Докажем, что и $K_1L_1 \parallel KL$, а $N_1M_1 \parallel NM$. Поскольку окружности, вписанные в $\triangle ACB$ и $\triangle ACD$, касаются между собой на диагонали в точке P, то $AN_1 = AP = AM_1$, т. е. $N_1M_1 \parallel NM$. Следовательно, четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$, как и четырехугольник $KLMN$, является вписанным.

142. Пусть (рис. 40, *а*, *б*) O_1, O_2, O_3, O_4 — соответственно центры окружностей, вписанных в $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$. Поскольку $O_1O_2O_3O_4$ — прямоугольник (см. задачу 127),



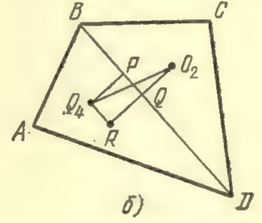


Рис. 40.

то $|O_1O_3| = |O_2O_4|$. Если K и L — точки касания окружностей вписанных в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, с AC, то $|KL| = \frac{1}{2}||AB| + |CD| - |BC| - |AD||$ (см. задачу 141). Аналогично, если P и Q — точки касания соответствующих окружностей с BD, то $|PQ| = |KL|$. Проведем через O_3 прямую параллельную AC, до пересечения с продолжением O_1K. Получим $\triangle O_1O_3M$, аналогично построим $\triangle O_2O_4R$. Эти два прямоугольных треугольника равны, так как у них $|O_1O_3| = |O_2O_4|$, $|O_3M| = |KL| = |PQ| = |O_4R|$. Значит, $|O_1M| = |O_2R|$, но $|O_1M|$ равен сумме радиусов окружностей, вписанных в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, а O_2R равен сумме радиусов окружностей, вписанных в $\triangle ACD$ и $\triangle BDA$.

143. Пусть $\overset{\smile}{KL}$ — дуга окружности, находящаяся внутри треугольника ABC. Продолжив стороны AB и BC за точку B, мы получим дугу $\overset{\smile}{MN}$, симметричную $\overset{\smile}{KL}$ относительно диаметра, параллельного AC. Поскольку $\widehat{ABC}$ измеряется дугой $\frac{1}{2}(\overset{\smile}{KL} + \overset{\smile}{MN}) = \overset{\smile}{KL}$, значит, дуга $\overset{\smile}{KL}$ имеет постоянную длину, ей соответствует центральный угол, равный $\widehat{ABC}$.

144. Пусть (рис. 41) O — точка пересечения прямых, A и A_1 — два положения точки на одной прямой, B и B_1 — положения в эти же моменты времени другой точки. Восставим к AB и A_1B_1 перпендикуляры в их серединах и обозначим через M их точку пересечения; $\triangle AA_1M = \triangle BB_1M$ по трем сторонам — один получается из другого поворотом на угол AOB с центром M. При этом повороте любое положение точки на AO приходит в соответствующее положение точки на OB, так что M обладает нужным свойством.

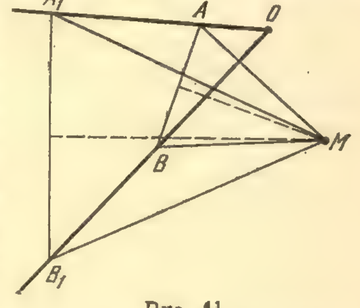


Рис. 41.

145. а) Пусть A и B — точки пересечения окружностей, A — точка, из которой велосипедисты выехали. M и N — положения велосипедистов в некоторый момент времени. Если M и N — по одну сторону от AB, то $\widehat{ABM} = \widehat{ABN}$; если по разные, то $\widehat{ABM} + \widehat{ABN} = 180°$, т. е. точки B, M и N расположены на одной

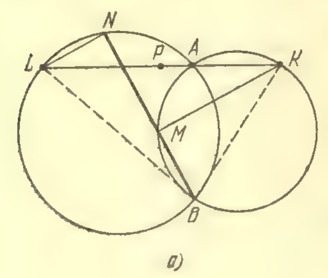


Рис. 42.

прямой. Если L и K — точки окружностей, диаметрально противоположные B (L и K фиксированы), то поскольку $\widehat{LNM} = \widehat{NMK} = 90°$, середина LK — точка P — будет равноудалена от N и M. Можно убедиться, что P симметрична точке B относительно середины отрезка, соединяющего центры окружностей (рис. 42, a).

б) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей. Возьмем точку A_1 такую, что $O_1AO_2A_1$ — параллелограмм. Легко видеть, что

$\triangle MO_1A_1 = \triangle NO_2A_1$, так как $|MO_1| = |O_1A| = |O_2A|$, $|O_1A_1| = |O_2A| = |NO_2|$, $\widehat{MO_1A_1} = \varphi + \widehat{AO_1A_1} = \varphi + \widehat{AO_2A_1} = \widehat{NO_2A_1}$, где φ — угол, соответствующий дугам, пройденным велосипедистами (рис. 42, *б*).

Таким образом, искомые точки симметричны точкам пересечения окружностей относительно середины отрезка O_1O_2.

З а м е ч а н и е. В пункте а) можно было поступить точно так же, как и в пункте б). А именно, взяв точку P таким образом, что $\triangle O_1PO_2 = \triangle O_1AO_2$ (A и P — по одну сторону от O_1O_2 и не совпадают), легко доказать равенство соответствующих треугольников.

146. Пусть (рис. 43) A — данная точка, A_k — какая-то вершина $2n$-угольника, B_{k-1} и B_k — основания перпендикуляров, опущенных из A на стороны, заключающие A_k, α_k и β_k — углы, образованные прямой AA_k с этими сторонами ($\beta_k = \widehat{AA_kB_{k-1}}$, $\alpha_k = \widehat{AA_kB_k}$). Поскольку около четырехугольника $AB_{k-1}A_kB_k$ можно описать окружность, то $\widehat{AB_{k-1}B_k} = \alpha_k$, $\widehat{AB_kB_{k-1}} = \beta_k$ (или дополняют эти углы до 180°); таким образом, по теореме синусов

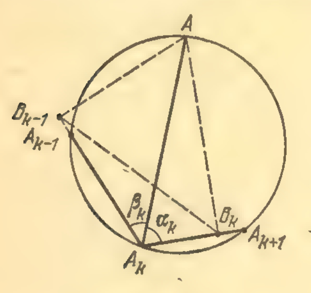


Рис. 43.

$$\frac{|AB_{k-1}|}{|AB_k|} = \frac{\sin\beta_k}{\sin\alpha_k},$$

$$\frac{|AB_{k-1}|\,|AB_{k+1}|}{|AB_k|^2} = \frac{\sin\beta_k \sin\alpha_{k+1}}{\sin\alpha_k \sin\beta_{k+1}}.$$

Перемножая эти равенства для $k = 2, 4, \ldots, 2n$, заменяя индекс $2n+1$ на 1, получим требуемый результат ($\sin\alpha_k = \sin\beta_{k+1}$, $\sin\beta_1 = \sin\alpha_{2n}$).

147. Докажите, что если O_k и O_{k+1} — центры окружностей, касающихся данной окружности в точках A_k и A_{k+1}, B — точка их пересечения, лежащая на хорде A_kA_{k+1}, r_k, r_{k+1} — их радиусы, то $r_k + r_{k+1} = r$, $\widehat{A_kO_kB} = \widehat{A_{k+1}O_{k+1}B} = \widehat{A_kOA_{k+1}}$ (r — радиус данной окружности, O — ее центр). Отсюда следует равенство радиусов через один, что при n нечетном приведет к тому, что все они — по $r/2$. Кроме того, $|\breve{A_kB}| + |\breve{BA_{k+1}}| = |\breve{A_kA_{k+1}}|$ (берутся меньшие дуги соответствующих окружностей).

148. Пусть длины сторон треугольника a, b, c, причем $b = \frac{a+c}{2}$.

а) Из равенства $pr = \frac{1}{2}bh_b$ (p — полупериметр, r — радиус вписанного круга, h_b — высота, опущенная на сторону b) получаем $\frac{a+b+c}{2}r = \frac{1}{2}bh_b$; но $a+c = 2b$, так что $h_b = 3r$.

б) Это утверждение следует из того, что $r = \frac{h_b}{3}$, а точка пересечения медиан делит каждую в отношении 2 : 1.

в) Продолжим биссектрису BD до пересечения с описанной окружностью в точке M (рис. 44). Если мы докажем, что O — центр вписанной окружности — делит BM пополам то тем самым будет доказано и наше утверждение. (Проведем диаметр BN; тогда прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей, будет параллельна NM, а $\widehat{BMN}=90°$.) Но $\triangle COM$ — равнобедренный, так как $\widehat{COM}=\widehat{OCM}=\frac{\hat{C}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}$. Значит, $|CM|=|OM|$. Из условия $b=\frac{a+c}{2}$ по свойству биссектрисы получаем, что $|CD|=\frac{a}{2}$. Пусть K — середина CB; $\triangle CKO=\triangle CDO$ ($|CK|=|CD|$, $\widehat{KCO}=\widehat{OCD}$); отсюда следует $\widehat{BKO}=\widehat{CDM}$, кроме того, $\widehat{DCM}=\widehat{OBK}=\frac{\hat{B}}{2}$, $|CD|=|BK|$, т. е. $\triangle BKO=\triangle CDM$, $|CM|=|BO|$, значит, $|BO|=|OM|$, что и требовалось.

г) Возьмем любую точку на биссектрисе. Пусть расстояния до сторон BC и BA равны x, а до стороны AC — y. Имеем

$$\frac{ax+cx+by}{2}=S_\triangle \Rightarrow b(2x+y)=2S_\triangle \Rightarrow 2x+y=h_b.$$

д) Если L — середина BA, то нужный нам четырехугольник гомотетичен четырехугольнику $BCMA$ с коэффициентом 1/2 (см. пункт в).

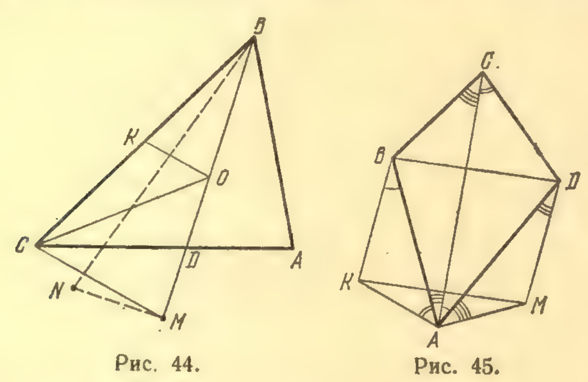


Рис. 44. Рис. 45.

149. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 45)

$$|AB|=a, \quad |BC|=b, \quad |CD|=c,$$
$$|DA|=d, \quad |AC|=m, \quad |BD|=n.$$

Построим на стороне AB во внешнюю сторону треугольник AKB, подобный треугольнику ACD, причем $\widehat{BAK}=\widehat{DCA}$, $\widehat{ABK}=\widehat{CAD}$, а на стороне AD построим $\triangle AMD$, подобный $\triangle ABC$, $\widehat{DAM}=\widehat{BCA}$, $\widehat{ADM}=\widehat{CAB}$ (рис. 45). Из соответствующего подобия

получим

$$|AK|=\frac{ac}{m}, \quad |AM|=\frac{db}{m}, \quad |KB|=|DM|=\frac{ad}{m}.$$

Кроме того, $\widehat{KBD}+\widehat{MDB}=\widehat{KBA}+\widehat{ABD}+\widehat{BDA}+\widehat{ADM}=\widehat{CAD}+$ $+\widehat{ABD}+\widehat{BDA}+\widehat{CAB}=180°$, т. е. четырехугольник $KBDM$ — параллелограмм. Значит, $|KM|=|BD|=n$. Но $\widehat{KAM}=\hat{A}+\hat{C}$. По теореме косинусов для $\triangle KAM$ имеем

$$n^2=\left(\frac{ac}{m}\right)^2+\left(\frac{db}{m}\right)^2-2\left(\frac{ac}{m}\right)\left(\frac{db}{m}\right)\cos(\hat{A}+\hat{C}),$$

откуда $m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\hat{A}+\hat{C})$.

150. Утверждение теоремы Птолемея является следствием теоремы Бретшнейдера (см. задачу 149), поскольку для вписанного четырехугольника $\hat{A}+\hat{C}=180°$.

151. Если $|MB|$ — наибольший из отрезков $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$, то, применив теорему Бретшнейдера (задача 149) к четырехугольнику $ABCM$, получим, что $|MB|^2=|MA|^2+|MC|^2-$ $-2|MA|\cdot|MC|\cos(\widehat{AMC}+60°)$, т. е. $|MB|<|MA|+|MC|$, поскольку $\cos(\widehat{AMC}+60°)\neq-1$.

152. а) Пусть A — произвольная точка окружности (A — на дуге $\overset{\frown}{A_{2n+1}A_1}$). Обозначим сторону многоугольника через a, а длину диагонали, соединяющей вершины через одну, — через b. По теореме Птолемея для четырехугольника $AA_kA_{k+1}A_{k+2}$

$$|AA_k|a+|AA_{k+2}|a=|AA_{k+1}|b, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1.$$

Аналогичные соотношения можно записать для четырехугольников $A_{2n}A_{2n+1}AA_1$ и $A_{2n+1}AA_1A_2$:

$$|AA_1|a+|AA_{2n+1}|b=|AA_{2n}|a,$$
$$|AA_{2n+1}|a+|AA_1|b=|AA_2|a.$$

Сложив все эти равенства, оставляя вершины с четными номерами справа, а с нечетными слева, получим требуемое утверждение.

б) Наше утверждение следует из пункта а) и результатов задач 20 и 21.

153. Пусть точки A, B, C и D в декартовой системе координат имеют координаты соответственно $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, $(x,\ y)$, координаты точки G — $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. Тогда справедливость доказываемого утверждения следует из тождества

$$3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2-$$
$$-\frac{(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x)^2}{3}$$

и аналогичного соотношения для ординат.

154. Рассмотрим случай, когда точка M (рис. 46) лежит внутри треугольника ABC. Повернем треугольник ABM вокруг A на угол 60° так, чтобы B перешла в C. Получим треугольник AM_1C,

равный $\triangle ABM$. $\triangle AMM_1$ — правильный, следовательно, длины сторон $\triangle CMM_1$ равны отрезкам $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$. Аналогично получим точки M_2 и M_3. Площадь шестиугольника $AM_1CM_3BM_2$ (рис. 46) равна удвоенной площади $\triangle ABC$, т. е. равна $a^2\sqrt{3}/2$. С другой стороны, площадь этого шестиугольника складывается из трех правильных треугольников: $\triangle AMM_1$, $\triangle CMM_3$, $\triangle BMM_2$ — и трех треугольников, равных искомому. Следовательно,

$$3S + \frac{|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

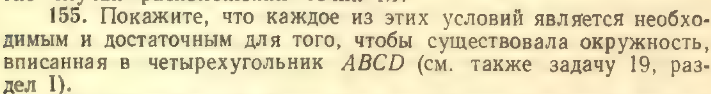
Рис. 46.

Воспользовавшись результатом задачи 153, получим

$$3S + \frac{(3d^2 + a^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2},$$

откуда $S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - 3d^2)$.

Аналогично рассматриваются другие случаи расположения точки M.



155. Покажите, что каждое из этих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы существовала окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$ (см. также задачу 19, раздел I).

156. Покажите, что каждое из этих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы существовала окружность, касающаяся прямых AB, BC, CD и DA, центр которой находится вне четырехугольника $ABCD$.

157. Пусть ABC — данный треугольник, O — его центр, A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из O на стороны BC, CA, AB. Пусть, далее, A_2, B_2, C_2 — основания перпендикуляров, опущенных из M на прямые, проходящие через O параллельно сторонам треугольника BC, CA и AB (ограничимся рассмотрением частного случая: треугольник ABC — остроугольный, точка M расположена внутри $\triangle OKL$, как показано на рис. 47), A_3, B_3, C_3 — основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны BC, CA и AB.

Рис. 47.

Заметим:

1) $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}S$.

2) $\triangle A_2B_2C_2$ подобен $\triangle ABC$, при этом OM является диаметром окружности, описанной около $\triangle A_2B_2C_2$, т. е. коэффициент подобия между треугольниками ABC и $A_2B_2C_2$ равен $d/2R$, и

следовательно, $S_{\triangle A_2B_2C_2}=\left(\frac{d^2}{4R^2}\right)S$. Обозначим через $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ величины углов $\triangle ABC$, $|OA_1|=d_a$, $|OB_1|=d_b$, $|OC_1|=d_c$, $|MA_2|=x$, $|MB_2|=y$, $|MC_2|=z$. Тогда $|MA_3|=d_a-x$, $|MB_3|=d_b+y$, $|MC_3|=d_c+z$. Таким образом, будем иметь

$$S_{A_3B_3C_3}=S_{A_3MB_3}+S_{B_3MC_3}+S_{C_3MA_3}=$$

$$=\frac{1}{2}(d_a-x)(d_b+y)\sin\hat{C}+\frac{1}{2}(d_b+y)(d_c+z)\sin\hat{A}+$$

$$+\frac{1}{2}(d_c+z)(d_a-x)\sin\hat{B}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}d_ad_b\sin\hat{C}+\frac{1}{2}d_bd_c\sin\hat{A}+\frac{1}{2}d_cd_a\sin\hat{B}\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{2}xy\sin\hat{C}+\frac{1}{2}xz\sin\hat{B}-\frac{1}{2}yz\sin\hat{A}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}[-x(d_b\sin\hat{C}+d_c\sin\hat{B})+y(d_a\sin\hat{C}+d_c\sin\hat{A})+$$

$$+z(d_b\sin\hat{A}+d_b\sin\hat{B})].$$

Но выражение в первых квадратных скобках есть площадь $\triangle A_1B_1C_1$, т. е. оно равно $S/4$, во вторых квадратных скобках стоит площадь $\triangle A_2B_2C_2$, т. е. $\left(\frac{d^2}{4R^2}\right)S$. Покажем, что третье слагаемое равно нулю. Поскольку $d_a=R\cos A$, $d_b=R\cos\hat{B}$, $d_c=R\cos\hat{C}$, третье слагаемое легко преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}[-xR\sin\hat{A}+yR\sin\hat{B}+zR\sin\hat{C}]=\frac{1}{4}[-xa+yb+zc],$$

где a, b и c — стороны треугольника ABC. Заметим, что $\triangle OKL$ подобен $\triangle ABC$; поэтому, если мы заменим a, b и c на a_1, b_1, c_1, где a_1, b_1, c_1 — стороны $\triangle OKL$, и покажем, что $yb_1+zc_1-xa_1=0$, то нулю будет равно и наше выражение. Но

$$yb_1+zc_1-xa_1=(yb_1+zc_1+(d_a-x)a_1)-d_aa_1=0,$$

поскольку $yb_1+zc_1+(d_a-x)a_1=2S_{OKL}$, $d_aa_1=2S_{OKL}$.

Рассмотрение других случаев расположения точек M и O проводится точно так же.

Замечание 1. При $d=R$ площадь треугольника, образованного основаниями перпендикуляров, оказывается равной нулю, т. е. эти основания расположены на одной прямой. Прямая эта называется *прямой Симсона* (см. задачу 233).

Замечание 2. Можно избежать разбора вариантов, приписав расстояниям до сторон знаки, при этом для точки, расположенной внутри треугольника, все три величины положительны, а для точек, расположенных по разные стороны от какой-либо прямой, образующей треугольник, расстояния до этой прямой имеют разные знаки. Приняв это во внимание, легко убедимся, что предложенное решение охватывает все случаи расположения точки M для произвольного треугольника.

158. Произведем последовательно три поворота в одном направлении вокруг точек K, L и M (или вокруг K_1, L_1 и M_1) на

углы α, β и γ. Поскольку $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, получившееся преобразование есть параллельный перенос (см. задачу 140, раздел I). Но поскольку одна из вершин исходного треугольника при этом останется неподвижной, то неподвижными должны остаться все точки плоскости.

Таким образом, центр третьего поворота (точка M) должен совпадать с центром поворота, получающегося в результате последовательного применения двух первых: вокруг точек K и L. Теперь можно воспользоваться результатом задачи 140, раздел I.

159. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — последовательные центры квадратов. Произведем последовательно повороты в одном направлении вокруг точек O_1, O_2, O_3, O_4 на углы в 90°. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, покажем, что получившееся преобразование оставляет все точки плоскости неподвижными. Следовательно (см. задачу 140, раздел I), каждую из двух пар поворотов: вокруг O_1 и O_2 и вокруг O_3 и O_4 — можно заменить центральной симметрией относительно одной и той же точки O. При этом $\triangle O_1OO_2$ и $\triangle O_3OO_4$ — равнобедренные прямоугольные треугольники с прямыми углами при вершине O. Следовательно, треугольник O_2OO_4 получается из треугольника O_1OO_3 поворотом вокруг O на 90°, т. е. $|O_1O_3|=|O_2O_4|$, $O_1O_3 \perp O_2O_4$.

160. Пусть ABC — данный треугольник, $A_1B_1C_1$ — треугольник Δ, $A_2B_2C_2$ — треугольник δ (A_1 и A_2 — центры треугольников, построенных на BC), стороны треугольника ABC, как обычно, — a, b, c.

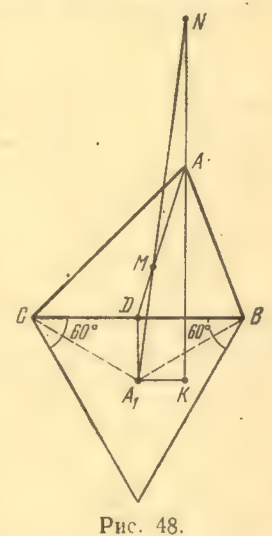


Рис. 48.

а) То, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ правильные, следует, например, из результата задачи 158.

б) Найдем расстояние от A_1 до M — точки пересечения медиан треугольника ABC. Пусть N — точка пересечения прямой A_1M и высоты к стороне BC, а K — точка пересечения с той же высотой прямой, проходящей через A_1 параллельно BC (очевидно, N лежит на продолжении высоты за точку A, а K — на продолжении за прямую BC, рис. 48). Если теперь D — середина BC, то

$$|A_1D| = \frac{a}{6}\sqrt{3}, \quad |AN| = 2|A_1D| = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$|NK| = h_a + |A_1D| + |AN| = h_a + \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(h_a — высота, проведенная из вершины A),

$$|A_1K| = \left|\frac{a}{2} - c\cos\hat{B}\right|,$$

$$|A_1M|^2=\frac{1}{9}|A_1N|^2=\frac{1}{9}(|NK|^2+|A_1K|^2)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(h_a^2+ah_a\sqrt{3}+\frac{3}{4}a^2+\frac{a^2}{4}-ac\cos\hat{B}+c^2\cos^2\hat{B}\right)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2S\sqrt{3}\right).$$

(Мы воспользовались равенствами $S=\frac{1}{2}ah_a$, $h_a^2+c^2\cos^2\hat{B}=c^2$ и теоремой косинусов.) Расстояния $|B_1M|$ и $|C_1M|$ находятся так же, и все они, как легко видеть, равны. Точно так же найдем квадраты расстояний M от точек A_2, B_2, C_2. Они равны $\frac{1}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-2S\sqrt{3}\right)$.

в) Используя результат предыдущего пункта, поскольку $S_\Delta=\frac{3}{4}|A_1M|^2\sqrt{3}$, $S_\delta=\frac{3}{4}|A_2M|^2\sqrt{3}$, легко получить требуемое утверждение.

161. Докажем, что треугольники CB_1A_2 и CA_1B_2 получаются один из другого поворотом около точки C на угол 90°. В самом деле, $\triangle CAA_1=\triangle CBB_1$ ($|BB_1|=|AC|$, $|BC|=|AA_1|$, $\widehat{CBB_1}=\widehat{CAA_1}$), а поскольку $AA_1\perp BC$ и $BB_1\perp AC$, то и $B_1C\perp A_1C$. Точно так же A_2C и B_2C равны и перпендикулярны.

162. Пусть ABC — данный треугольник, H — точка пересечения его высот, A_1, B_1, C_1 — середины отрезков AH, BH, CH, AA_2 — высота, A_3 — середина BC.

Будем считать для удобства, что ABC — остроугольный треугольник. Поскольку $\widehat{B_1A_1C_1}=\widehat{BAC}$ и $\triangle B_1A_2C_1=\triangle B_1HC_1$, то $\widehat{B_1A_2C_1}=\widehat{B_1HC_1}=180°-\widehat{BAC}$, т. е. точки A_1, B_1, A_2, C_1 лежат на одной окружности. Также легко видеть, что $\widehat{B_1A_3C_1}=\widehat{BHC_1}=180°-\widehat{BAC}$, т. е. точки A_1, B_1, A_3, C_1 тоже лежат на одной (а значит, на той же) окружности. Отсюда следует, что все 9 точек, о которых говорится в условии, лежат на одной окружности. Случай тупоугольного треугольника ABC рассматривается аналогично. Заметим, что окружность девяти точек гомотетична описанной окружности с центром в H и коэффициентом 1/2. (Именно так расположены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.) С другой стороны, окружность девяти точек гомотетична описанной окружности с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом −1/2. (Именно так расположены треугольники ABC и треугольник с вершинами в серединах его сторон.)

163. Наше утверждение следует из того, что D лежит на окружности девяти точек, а окружность девяти точек гомотетична описанной окружности с центром в H и коэффициентом 1/2 (см. задачу 162).

164. Наше утверждение следует из того, что E лежит на окружности девяти точек, а окружность девяти точек гомотетична описанной окружности с центром в M и коэффициентом −1/2 (см. задачу 162).

165. Воспользовавшись для правой части формулами

$$r=\frac{S}{p},\quad R=\frac{abc}{4S}\ \text{ и }\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

легко докажем требуемое соотношение.

166. Воспользуйтесь формулой Лейбница (задача 153), взяв в качестве M центр описанного круга.

167. Воспользуйтесь формулой Лейбница (задача 153), взяв в качестве M центр вписанного круга. Для вычисления, например, $|MA|^2$ опустим перпендикуляр MK на AB; имеем $|MK|=r$, $|AK|=p-a$, значит, $|AM|^2=(p-a)^2+r^2$.

Аналогично вычисляются $|MB|^2$ и $|MC|^2$. При упрощении правой части воспользуйтесь результатом задачи 165.

168. Пусть O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, а O_1 — центр вписанной, M — точка пересечения биссектрисы угла B с описанной окружностью (рис. 49). Поскольку точка O_1 удалена на d от центра O, то $|BO_1|\cdot|O_1M|=R^2-d^2$. Треугольник O_1CM — равнобедренный: $|O_1M|=|CM|$, так как $\widehat{CO_1M}=\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})$ и $\widehat{O_1CM}=\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})$.

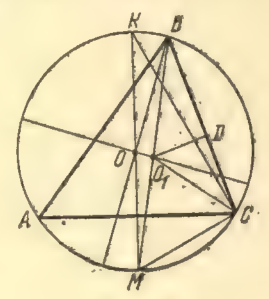


Рис. 49.

Проведя диаметр MK и опустив на BC перпендикуляр O_1D, получим два подобных прямоугольных треугольника MKC и O_1BD, откуда $\frac{|MK|}{|MC|}=\frac{|BO_1|}{|O_1D|}$, но $|MK|=2R$, $|O_1D|=r$, $|MC|=|MO_1|$, значит, $2Rr=|BO_1|\cdot|O_1M|=R^2-d^2$.

169. Пусть G — центр тяжести треугольника ABC, O — центр описанного круга, I — центр вписанного, O_1 — центр окружности девяти точек. G лежит на отрезке OO_1, причем $|OG|=2|GO_1|$. Если $\widehat{OGI}=\varphi$, то

$$\begin{cases}|OI|^2=|OG|^2+|GI|^2-2|OG|\cdot|GI|\cos\varphi,\\ |O_1I|^2=|GI|^2+|GO_1|^2+2|GI|\cdot|GO_1|\cos\varphi.\end{cases}$$

Умножая второе равенство на 2 и складывая с первым, получим

$$2|O_1I|^2+|OI|^2=|OG|^2+2|GO_1|^2+3|GI|^2.$$

Учитывая, что $|GO_1|=\frac{1}{2}|GO|$, получим

$$|O_1I|^2=\frac{1}{2}\left(3|GI|^2+\frac{3}{2}|GO|^2-|OI|^2\right).$$

Из результатов задач 165—168 получим

$$|O_1I|^2=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{3}+\frac{5}{3}r^2-\frac{16}{3}Rr+\frac{3}{2}R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}-R^2+2Rr\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{3}+\frac{5}{3}r^2-\frac{10}{3}Rr+\frac{R^2}{2}-\frac{1}{3}p^2+\frac{1}{3}r^2+\frac{4}{3}Rr\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{2}-2Rr+2r^2\right)=\left(\frac{R}{2}-r\right)^2.$$

Итак, $|O_1I| = \left|\frac{R}{2} - r\right|$, что и означает касание (внутреннее) между вписанной окружностью и окружностью девяти точек.

170. Докажите, что если D — проекция M на AB, то

$$|AD|^2 - |BD|^2 = |AM|^2 - |MB|^2.$$

171. Если бы такая точка нашлась (обозначим ее через N), то прямая MN была бы перпендикулярна всем трем сторонам треугольника.

172. Если M — точка пересечения перпендикуляров, опущенных из A_1 и B_1 на BC и AC, то (см. задачу 170)

$$|MB|^2 - |MC|^2 = |A_1B|^2 - |A_1C|^2,$$
$$|MC|^2 - |MA|^2 = |B_1C|^2 - |B_1A|^2;$$

складывая эти равенства и учитывая условия задачи, получим, что $|MB|^2 - |MA|^2 = |C_1B|^2 - |C_1A|^2$, т. е. M лежит на перпендикуляре, проведенном к AB через C_1.

173. Из результата задачи 172 следует, что условие того, чтобы перпендикуляры, опущенные из A_1, B_1, C_1 на стороны BC, CA и AB, пересекались в одной точке, такое же, как и условие пересечения в одной точке перпендикуляров, опущенных из A, B и C на B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1.

174. Заметим, что перпендикуляры, опущенные из A_1, B_1, C_1 на BC, CA, AB соответственно, пересекаются в точке D, затем воспользуемся результатом задачи 173.

175. В следующей задаче (176) доказывается более общий факт. Из рассуждений задачи 176 будет следовать, что центр окружности расположен на прямой AB.

176. Введем прямоугольную систему координат. Если координаты точек A_1, A_2, ..., A_n — (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), точки M — (x, y), то уравнение точек нашего множества будет иметь вид

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0,$$

где $a = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, откуда и следует наше утверждение.

177. Если B — точка касания, O — центр данной окружности, то

$$|OM|^2 - |AM|^2 = |OM|^2 - |BM|^2 = |OB|^2 = R^2.$$

Значит, M лежит на прямой, перпендикулярной OA (см. задачу 170).

178. Условие, определяющее множество точек M, эквивалентно условию $|AM|^2 - k^2|BM|^2 = 0$, т. е. это есть окружность (см. задачу 176). Эта окружность называется *окружностью Аполлония*; ее центр, как легко убедиться, лежит на прямой AB.

179. Поскольку MB является биссектрисой $\widehat{AMC}$, то $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$. Следовательно, биссектриса внешнего угла по отношению к углу AMC пересекает прямую AC в постоянной точке K: $\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$, и искомое множество точек M есть дуга окружности, построенной на BK как на диаметре, заключенная между прямыми, перпендикулярными отрезку AC и проходящими через точки A и C.

180. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, r_1 и r_2 — их радиусы, M — точка искомого множества, MA_1 и MA_2 — касательные. По условию $|MA_1| = k|MA_2|$. Следовательно, $|MO_1|^2 - k^2|MO_2|^2 = (|MA_1|^2 + r_1^2) - k^2(|MA_2|^2 + r_2^2) = r_1^2 - k^2r_2^2$. Значит (см. задачу 175), искомое множество точек M при $k \neq 1$ есть окружность с центром на прямой O_1O_2, при $k = 1$ искомое множество есть прямая, перпендикулярная O_1O_2.

181. Пусть (рис. 50) K и L — точки пересечения касательной ко второй окружности, проходящей через D, с касательными к первой, проходящими через B и A, а M и N — другие две точки. Легко видеть, что $\widehat{DKB} = \widehat{CMA}$ (каждый из этих углов равен половине разности углов, соответствующих дугам $\breve{AB}$ и $\breve{CD}$). Поэтому (на нашем рисунке) $\widehat{LMN} + \widehat{LKM} = 180°$.

Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — вписанный. Далее, имеем

$$\frac{|DK|}{|KB|} = \frac{\sin\widehat{DBK}}{\sin\widehat{BDK}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\breve{AB}}{\sin\frac{1}{2}\breve{DC}}.$$

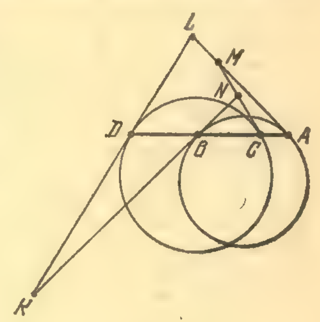


Рис. 50.

Аналогично находятся отношения длин касательных, проведенных через точки L, M и N. Все эти отношения равны между собой; значит, центр окружности, описанной около $KLMN$, лежит на прямой, проходящей через центры данных окружностей (см. задачу 175).

182. Выразив расстояния от вершин треугольника до точек касания, проверьте выполнение условия задачи 172.

183. Пусть $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| = p : q : r$. Тогда множество точек M таких, что

$$(r^2 - q^2)|AM|^2 + (p^2 - r^2)|BM|^2 + (q^2 - p^2)|CM|^2 = 0,$$

есть прямая линия, проходящая через M_1, M_2 и центр описанного около $\triangle ABC$ круга (см. задачу 176).

184. Точки M_1 и M_2 принадлежат множеству точек M, для которых $5|MA|^2 - 8|MB|^2 + 3|MC|^2 = 0$. Это множество есть прямая линия, и, очевидно, центр описанного круга удовлетворяет условию, определяющему это множество (см. задачу 176).

185. Пусть $|AA_1| = a$, $|BB_1| = b$, $|CC_1| = c$, $|A_1B_1| = x$, $|B_1C_1| = y$, $|C_1A_1| = z$. Тогда $|AB_1|^2 = a^2 + x^2$, $|B_1C|^2 = c^2 + y^2$, $|CA_1|^2 = c^2 + z^2$, $|A_1B|^2 = b^2 + x^2$, $|BC_1|^2 = b^2 + y^2$, $|C_1A|^2 = a^2 + z^2$. Теперь легко проверить условие задачи 172.

186. Пусть $|AD| = x$, $|BD| = y$, $|CD| = y$, $|AB| = a$. Обозначим через A_2, B_2, C_2 точки касания окружностей, вписанных в треугольники BCD, CAD, ABD, со сторонами BC, CA, AB. Перпендикуляры, проведенные через точки A_1, B_1, C_1 к сторонам BC, CA и AB, совпадают с перпендикулярами, восставленными к тем же сторонам в точках A_2, B_2, C_2.

Но $|BA_2| = \frac{a+y-z}{2}$, $|A_2C| = \frac{a+z-y}{2}$; аналогично $|AC_2| = \frac{a+x-y}{2}$, $|C_2B| = \frac{a+y-x}{2}$, $|AB_2| = \frac{a+x-z}{2}$, $|B_2C| = \frac{a+z-x}{2}$. Теперь легко проверить условие задачи 172.

187. Примените условие, доказанное в задаче 173, взяв в качестве точек A, B и C центры окружностей, а в качестве точек A_1, B_1, C_1 — по одной из точек пересечения окружностей (A_1 — одна из точек пересечения окружностей с центрами B и C и т. д.).

188. Возьмем третью окружность с диаметром BC. Общими хордами 1-й и 3-й, а также 2-й и 3-й окружностей являются высоты треугольника, опущенные из вершин B и C. Следовательно (см. задачу 187), общая хорда данных окружностей также проходит через точку пересечения высот треугольника ABC.

189. Пусть O — центр данной окружности, R — ее радиус, MC — касательная к ней. Имеем: $|MO|^2 - |MN|^2 = |MO|^2 - |MB| \cdot |MA| = |MO|^2 - |MC|^2 = R^2$, т. е. точка M лежит на прямой, перпендикулярной прямой ON (см. задачу 170). Легко показать, что все точки этой прямой принадлежат нашему множеству.

190. Пусть O — центр окружности, r — радиус окружности, $|OA| = a$, BC — некоторая хорда, проходящая через A, M — точка пересечения касательных. Тогда

$$|OM|^2 = |BM|^2 + r^2,$$

$$|AM|^2 = |BM|^2 - \frac{1}{4}|BC|^2 + \left(\frac{1}{2}|BC| - |BA|\right)^2 =$$

$$= |BM|^2 - |BC| \cdot |BA| + |BA|^2 = |BM|^2 - |BA| \cdot |AC| =$$

$$= |BM|^2 - r^2 + a^2.$$

Таким образом, $|OM|^2 - |AM|^2 = 2r^2 - a^2$, т. е. (см. задачу 170) искомое множество точек есть прямая, перпендикулярная OA. Эта прямая называется *полярой* точки A относительно данной окружности.

191. Имеем

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{S_{ACC_1}}{S_{CC_1B}} = \frac{\frac{1}{2}|AC| \cdot |CC_1| \sin \widehat{ACC_1}}{\frac{1}{2}|CC_1| \cdot |CB| \sin \widehat{O_1CB}} = \frac{|AC|}{|BC|} \frac{\sin \widehat{ACC_1}}{\sin \widehat{C_1CB}}.$$

Получив аналогичные равенства для отношений $\frac{|BA_1|}{|A_1C|}$ и $\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$, перемножив их, получим требуемое утверждение.

192. Покажем, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (обозначим ее через M), то $R^* = 1$ (а следовательно, и $R = 1$; см. задачу 191). По теореме синусов для $\triangle AMC$

$$\frac{\sin \widehat{ACC_1}}{\sin \widehat{A_1AC}} = \frac{|AM|}{|MC|}.$$

Записав аналогичные равенства для треугольников AMB и BMC и перемножив их, получим требуемое утверждение. Обратно, если

$R=1$ и все точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника (или лишь одна из них), то, проведя прямые AA_1 и BB_1, обозначим точку их пересечения через M_1; пусть прямая CM_1 пересекает AB в точке C_2. Учитывая условия задачи и доказанную необходимость условия $R=1$, будем иметь $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{|AC_2|}{|C_2B|}$, причем точки C_1 и C_2 лежат одновременно или на отрезке AB, или вне его. Следовательно, C_1 и C_2 совпадают.

193. Пусть A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. Проведем через C прямую, параллельную AB, и обозначим через M точку ее пересечения с прямой A_1B_1. Из подобия соответствующих треугольников получим $\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=\frac{|BC_1|}{|CM|}$, $\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=\frac{|CM|}{|AC_1|}$. Заменив соответствующие отношения в выражении R (см. задачу 191), получим, что $R=1$. Обратное утверждение доказывается аналогично тому, как это было сделано в задаче 192 (проведем прямую B_1A_1, обозначим через C_2 точку ее пересечения с AB и т. д.).

194. Проверьте, что если для данных прямых $R^*=1$, то и для симметричных будет так же. При этом, если прямая, проходящая, например, через вершину A, пересекает сторону BC, то и прямая, ей симметричная относительно биссектрисы угла A, также будет пересекать сторону BC.

195. Если A_0, B_0, C_0 — середины отрезков AO, BO, CO соответственно, то построенные прямые оказываются симметричными прямым A_0O, B_0O, C_0O относительно биссектрис треугольника $A_0B_0C_0$ (см. задачу 194).

196. Пусть K — точка на радиусе, перпендикулярном стороне AC, а L — на радиусе, перпендикулярном стороне AB. Прямая BK пересекает AC в B_1, а прямая CL пересекает AB в точке C_1. Проведем через K прямую, параллельную AC, пусть M и N — ее точки пересечения с AB и BC. Очевидно, $\frac{|AB_1|}{|B_1C|}=\frac{|MK|}{|KN|}$. Проведя через L прямую, параллельную AB, до пересечения с AC и BC в точках P и Q, будем иметь $\frac{|BC_1|}{|C_1A|}=\frac{|QL|}{|LP|}$. Аналогичное построение сделаем для третьего радиуса. Заменяя отношения, входящие в R (см. задачу 192), учтем, что для каждого отрезка в числителе найдется равный ему в знаменателе, например: $|MK|=|LP|$.

197. Рассмотрим треугольник ACE, через вершины которого проведены прямые AD, CF и EB. Синусы углов, образованных этими прямыми со сторонами треугольника ACE, пропорциональны хордам, на которые они опираются $\left(\text{например } \sin\widehat{CAD}=\frac{|CD|}{2R},\right.$ где R — радиус окружности$\left.\right)$; следовательно, условие $R^*=1$ (см. задачу 192) эквивалентно условию, данному в задаче.

198. Заметим (рис. 51, *а*), что $\triangle APM$ подобен $\triangle AMQ$, $\triangle APL$ подобен $\triangle AKQ$, $\triangle AKN$ подобен $\triangle ALN$; из этих подобий получаем

$$\frac{|PM|}{|MQ|}=\frac{|AM|}{|AQ|},\quad \frac{|QK|}{|PL|}=\frac{|AQ|}{|AL|},\quad \frac{|LN|}{|NK|}=\frac{|AL|}{|AN|}.$$

Перемножая эти равенства и учитывая, что $|AM| = |AN|$, получим, что $\frac{|PM| \cdot |QK| \cdot |LN|}{|MQ| \cdot |PL| \cdot |NK|} = 1$, а это (см. задачу 197) и есть необходимое и достаточное условие того, чтобы прямые MN, PK и QL пересекались в одной точке.

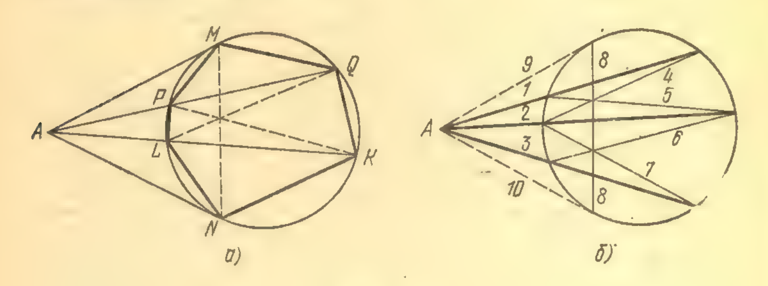


Рис. 51.

Способ построения касательной с помощью одной линейки понятен из рис. 51, *б*. Числа 1, 2, ... показывают последовательность проведения прямых.

199. Проверьте, что выполняется равенство $R=1$ (в пункте б воспользуйтесь результатом задачи 50) и что все три точки лежат на продолжениях сторон треугольника. Таким образом, наше утверждение следует из теоремы Менелая (см. задачу 193).

200. По свойству секущих, проведенных из внешней точки к окружности, или по свойству отрезков хорд окружности, проходящих через одну точку, будем иметь $|BC_1| \cdot |BC_2| = |BA_1| \cdot |BA_2|$, $|CB_1| \cdot |CB_2| = |CA_1| \cdot |CA_2|$, $|AB_1| \cdot |AB_2| = |AC_1| \cdot |AC_2|$.

Теперь легко проверить, что если утверждение теоремы Чевы (равенство $R=1$) выполняется для точек A_1, B_1, C_1, то оно выполняется и для точек A_2, B_2, C_2. При этом из утверждения задачи следует, что или все три точки A_2, B_2, C_2 лежат на соответствующих сторонах треугольника, или только одна из них (см. задачу 192).

201. Записав равенство $R=1$ (согласно теоремам Чевы и Менелая — см. задачи 192 и 193) для точек A_1, B_1, C_1; A_1, B_1, C_2; A_2, B_1, C_1; A_1, B_2, C_1, мы получим, что и для точек A_2, B_2, C_2 $R=1$. Теперь осталось лишь доказать, что или все три точки A_2, B_2, C_2 лежат на продолжениях сторон треугольника (так будет, если точки A_1, B_1, C_1 — на сторонах треугольника), или лишь одна находится на продолжении (если на сторонах треугольника одна из точек A_1, B_1, C_1), и воспользоваться теоремой Менелая (см. задачу 193).

202. Воспользуйтесь теоремой Менелая (см. задачу 193). В качестве вершин данного треугольника возьмите середины сторон треугольника ABC, на сторонах и продолжении сторон которого лежат рассматриваемые точки.

203. Если a — длина стороны пятиугольника $MKLNP$, b — длина стороны пятиугольника с одной стороной на AB, c — длина стороны пятиугольника, у которого одна сторона —

на AC, то

$$\frac{|BA_1|}{|C_1B|}=\frac{a}{b},\quad \frac{|AC_1|}{|AB_1|}=\frac{b}{c},\quad \frac{|CB_1|}{|CA_1|}=\frac{c}{a}.$$

Перемножив эти равенства, найдем, что $R=1$, и воспользуемся теоремой Чевы (задача 192).

204. Воспользуйтесь результатами задач 198 и 190. Полученное множество совпадает с множеством задачи 190, т. е. это есть поляра точки A относительно данной окружности.

205. Если N — точка пересечения прямых PQ и AB, то $\frac{|CN|}{|AN|}=\frac{|PC|}{|AQ|}=\frac{|CB|}{|AC|}$, т. е. N — фиксированная точка. Искомое множество есть окружность с диаметром CN.

Если теперь M — фиксированная точка, то D лежит на прямой, параллельной прямой MN и проходящей через такую фиксированную точку L на прямой AB, для которой $\frac{|AL|}{|LB|}=\frac{|AN|}{|CN|}$, причем L так же расположена относительно отрезка AB, как N относительно отрезка AC.

206. Обозначим (рис. 52) через φ угол между BD и AC; $S_{APK}=\frac{1}{2}|AK|\cdot|PD|\sin\varphi$, $S_{BPC}=\frac{1}{2}|BP|\cdot|DC|\sin\varphi=$ $=\frac{1}{2}|BP|\cdot|AD|\sin\varphi$. Поскольку $S_{APK}=S_{BPC}$, то $|AK|\cdot|PD|=$ $=|BP|\cdot|AD|$ или $\frac{|AK|}{|AD|}\cdot\frac{|PD|}{|BP|}=$ $=1$; но по теореме Менелая для $\triangle BDK$ (см. задачу 193) $\frac{|AK|}{|AD|}\times$ $\times\frac{|DP|}{|PB|}\cdot\frac{|BM|}{|MK|}=1$, следовательно, $|BM|=|MK|$, т. е. искомое множество есть средняя линия $\triangle ABC$, параллельная стороне AC (если же точки P и K брать на прямых AC и BD, то мы получим прямую, параллельную стороне AC, проходящую через середины отрезков AB и BC).

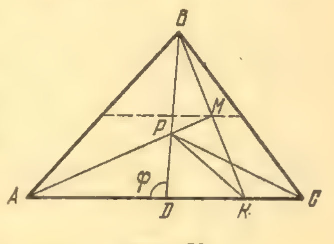


Рис. 52.

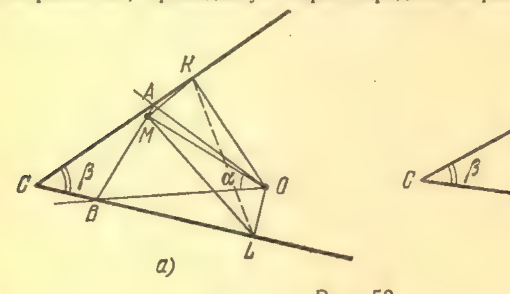


Рис. 53.

207. Пусть C — вершина данного угла, β — его величина. Опустим из O перпендикуляры OK и OL на стороны угла

(рис. 53, *а*). Около четырехугольника $OKAM$ можно описать окружность. Следовательно, $\widehat{KMO}=\widehat{KAO}$. Аналогично $\widehat{OML}=\widehat{OBL}$. Значит, $\widehat{KML}=\widehat{KAO}+\widehat{OBL}=\alpha+\beta$, т. е. M лежит на дуге окружности, проходящей через K и L и вмещающей угол $(\alpha+\beta)$; при этом все точки этой дуги принадлежат нашему множеству. Если $\alpha\leqslant\beta$, то этим наше множество исчерпывается. Если же $\alpha>\beta$, то добавятся точки M по другую сторону от прямой KL, для которых $\widehat{KML}=\alpha-\beta$ (рис. 53, *б*); при этом множеством точек будет пара дуг, концы которых будут определяться предельными положениями угла AOB, когда одна его сторона становится параллельной стороне неподвижного угла. Если лучи неподвижного угла β и подвижного α продолжить — вместо углов рассматривать пары прямых, то искомое множество будет целой окружностью (содержащей обе дуги, о которых говорилось выше).

208. Рассмотрим четырехугольник $DEPM$. $\widehat{DEM}=\widehat{DPM}=90°$, следовательно, этот четырехугольник вписанный. Значит, $\widehat{DME}=\widehat{DPE}=45°$. Искомое множество есть прямая DC.

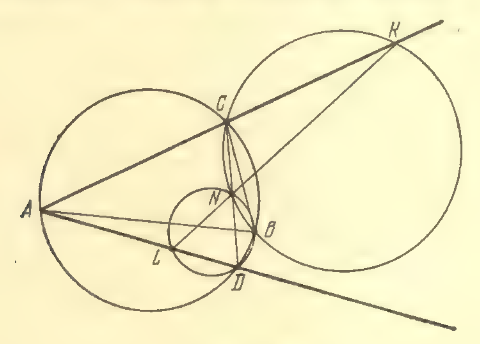


Рис. 54.

209. Рассмотрим случай, когда точка B лежит внутри данного угла. Прежде всего заметим, что все получающиеся $\triangle BCD$ (рис. 54) подобны между собой, поскольку $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}$, $\widehat{BDC}=\widehat{BAC}$. Поэтому, если N — середина CD, то постоянными будут углы $\widehat{BNC}$ и $\widehat{BND}$. Опишем около $\triangle BNC$ окружность. Пусть K — вторая точка пересечения этой окружности с AC. Поскольку $\widehat{BKA}=180°-\widehat{BNC}$, точка K фиксирована. Аналогично, фиксированной будет точка L — вторая точка пересечения окружности, описанной около $\triangle BND$, с прямой AD. При этом

$$\widehat{LNK}=\widehat{LNB}+\widehat{BNK}=180°-\widehat{BDA}+\widehat{BCK}=180°,$$

т. е. N лежит на прямой LK. Множество точек N есть отрезок LK, а множеством центров тяжести $\triangle ACD$ будет отрезок, ему параллельный, делящий AK в отношении $2:1$ (получается с помощью гомотетии с центром в A и коэффициентом $2/3$).

210. Если O — вершина угла, $ABCD$ — прямоугольник (A фиксирована), то точки A, B, C, D, O — на одной окружности. Следовательно, $\widehat{COA}=90°$, т. е. точка C лежит на прямой, перпендикулярной OA и проходящей через O.

211. Заметим, что все получающиеся треугольники ABC подобны между собой. Следовательно, если мы возьмем в каждом треугольнике точку K, делящую сторону BC в одном и том же отношении, то, поскольку $\widehat{AKC}$ сохраняет постоянное значение, точка K будет описывать окружность. Значит, точка M, делящая AK в постоянном отношении, также будет описывать окружность, получающуюся из предыдущей с помощью гомотетии с центром в точке A и с коэффициентом $k=\frac{|AM|}{|AK|}$. Это рассуждение используется во всех пунктах а), б) и в).

212. Пусть K — середина AB, а M — основание перпендикуляра, опущенного из K на AC. Все треугольники AKM подобны между собой (по двум углам), следовательно, будут подобны все треугольники ABM. Теперь легко получить, что искомое множество есть окружность с хордой BC, причем углы, опирающиеся на эту хорду, равны углу AMB или к нему дополнительному. (Меньшая дуга этой окружности расположена по ту же сторону от BC, что и меньшая дуга исходной окружности.)

213. Если M, N, L и K — данные точки (M и N — на противоположных сторонах прямоугольника, L и K также), P — середина MN, Q — середина KL, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника (рис. 55), то $\widehat{POQ}=90°$. Следовательно, искомым множеством будет окружность, построенная на PQ как на диаметре.

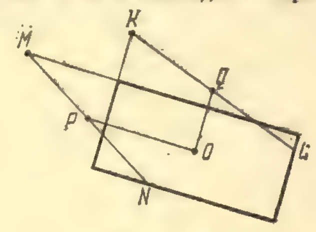


Рис. 55.

214. Обозначим радиусы данных окружностей через R и r ($R>r$), точку касания хорды BC с меньшей окружностью — через D; K и L будут точки пересечения хорд AC и AB с меньшей окружностью и, наконец, O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Поскольку угловые измерения дуг $\breve{AK}$ и $\breve{AC}$ одинаковы, можно записать $|AK|=rx$, $|AC|=Rx$; отсюда получим $|DC|^2=|AC|\cdot|CK|=(R-r)Rx^2$. Аналогично $|AB|=Ry$, $|DB|^2=(R-r)Ry^2$; следовательно, $\frac{|CD|}{|DB|}=\frac{x}{y}=\frac{|AC|}{|AB|}$, т. е. AD — биссектриса угла BAC. Далее, имеем

$$\frac{|AO|}{|OD|}=\frac{|AC|}{|CD|}=\frac{Rx}{\sqrt{(R-r)Rx}}=\sqrt{\frac{R}{R-r}}.$$

Таким образом, искомым множеством точек будет окружность, касающаяся изнутри двух данных в той же точке A, с радиусом

$$\rho=r\frac{|AO|}{|AD|}=\frac{r\sqrt{R}}{\sqrt{R}+\sqrt{R-r}}.$$

215. Покажите, что если M_1 и M_2 — две различные точки, принадлежащие нашему множеству, то любая точка M отрезка прямой M_1M_2 внутри треугольника также принадлежит этому множеству. Для этого, обозначив через x_1, y_1, z_1 расстояния от M_1 до сторон треугольника, через x_2, y_2, z_2 расстояния от M_2, можем выразить расстояния x, y, z от M до сторон через эти величины и расстояния между M_1, M_2, M. Так, например, если $|M_1M| = k|M_1M_2|$ и направления $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ совпадают, то $x = (1-k)x_1 + kx_2$, $y = (1-k)y_1 + ky_2$, $z = (1-k)z_1 + kz_2$.

Отсюда следует, что если равенство выполняется для трех точек внутри треугольника, не лежащих на одной прямой, то оно будет выполняться для всех точек треугольника.

Замечание. Утверждение задачи останется верным для произвольного выпуклого многоугольника. Более того, можно рассматривать все точки плоскости, но при этом расстояния до прямой от точек, расположенных по разные стороны от нее, должны браться с противоположными знаками.

216. Для того чтобы расстояния x, y, z были сторонами треугольника, необходимо выполнение неравенств $x < y + z$, $y < z + x$, $z < x + y$. Но множество точек, для которых, например, $x = y + z$, есть отрезок с концами в основаниях биссектрис (в основании биссектрисы два расстояния равны, а третье равно нулю, следовательно, равенство выполняется; а из предыдущей задачи следует, что это равенство выполняется для всех точек отрезка).

Ответ: искомое множество состоит из точек, расположенных внутри треугольника с вершинами в основаниях биссектрис.

217. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, O — центр вписанной окружности, M_1 — середина AC, M_2 — середина BD, r — радиус окружности (расстояния от O до сторон равны r), x_1, y_1, z_1, u_1 — расстояния от M_1 до AB, BC, CD, DA, x_2, y_2, z_2, u_2 — соответственно расстояния от M_2 до тех же сторон. Поскольку $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$, то

$$|AB|r - |BC|r + |CD|r - |DA|r = 0.$$

Кроме того,

$$|AB|x_1 - |BC|y_1 + |CD|z_1 - |DA|u_1 = 0,$$

$$|AB|x_2 - |BC|y_2 + |CD|z_2 - |DA|u_2 = 0$$

а это и означает, что точки O, M_1, M_2 лежат на одной прямой (см. замечание к задаче 215).

Точно так же разбираются другие случаи расположения точек A, B, C и D и центра окружности. При этом нужно использовать соотношения, возникающие между отрезками $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ (см. задачи 155, 156), и в соответствии с замечанием к задаче 215, если какие-то две точки окажутся расположенными по разные стороны от какой-либо прямой, то соответствующим расстояниям нужно приписывать разные знаки.

218. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, прямая O_1O_2 пересекает окружности в точках A, B, C, D (последовательно).

Рассмотрим два случая.

а) Прямоугольник $KLMN$ расположен таким образом, что противоположные вершины K, M лежат на одной окружности,

а L и N — на другой. В этом случае, если P — точка пересечения диагоналей (рис. 56, *а*), то

$$|O_1P|^2-|O_2P|^2=(|O_1K|^2-|KP|^2)-(|O_2L|^2-|LP|^2)=$$
$$=|O_1K|^2-|O_2L|^2=R_1^2-R_2^2,$$

где R_1 и R_2 — радиусы окружностей, т. е. точка P лежит на общей хорде окружностей, при этом исключается середина общей хорды и ее концы, так как в этом случае прямоугольник вырождается.

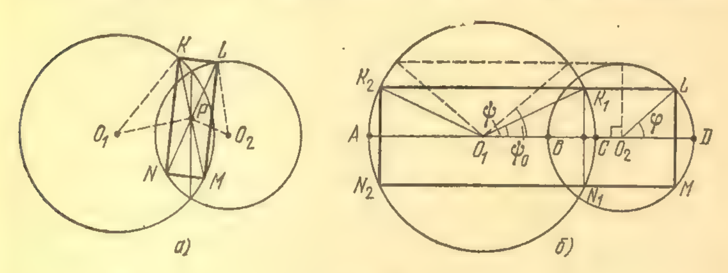


Рис. 56.

б) Две соседние вершины прямоугольника $KLMN$ лежат на одной окружности, а две — на другой. Поскольку перпендикуляры, опущенные из O_1 на KN и из O_2 на LM, должны делить их пополам, прямая O_1O_2 является осью симметрии прямоугольника $KLMN$.

Пусть $R_2<R_1$ и радиус O_2L образует угол φ с линией центров. Проведем через L прямую, параллельную O_1O_2. Эта прямая пересечет окружность O_1 в двух точках: K_1 и K_2, и точке L будут соответствовать два прямоугольника: K_1LMN_1 и K_2LMN_2 (рис. 56, *б*). При изменении φ от 0 до $\pi/2$ угол ψ, образованный радиусом O_1K_1 с лучом O_1O_2, меняется от 0 до некоторого значения ψ_0, при дальнейшем изменении φ (от $\pi/2$ до π) ψ уменьшается от ψ_0 до 0. При этом центры прямоугольников K_1LMN_1 опишут отрезок от середины CD до середины BC, исключая крайние точки и точку пересечения этого отрезка с общей хордой. Аналогично, центры прямоугольников K_2LMN_2 будут заполнять интервал с концами в серединах AB и AD (концы интервала не входят в наше множество).

Если три вершины прямоугольника, а значит, и четвертая лежат на одной окружности, то центр прямоугольника совпадает с центром соответствующей окружности.

Таким образом, искомое множество есть объединение трех интервалов: концы первого — середина AB и середина AD, концы второго — середина BC и середина CD, концы третьего — точки пересечения окружностей. При этом исключается середина общей хорды.

219. Если B и C — первая и вторая точки отражения, O — центр, то BO — биссектриса $\widehat{CBA}$. Путь шарика симметричен относительно диаметра, содержащего C, поэтому A лежит на этом диаметре. Если $\widehat{BCO}=\widehat{CBO}=\varphi$, то $\widehat{ABO}=\varphi$, $\widehat{BOA}=2\varphi$, применяя теорему

синусов к $\triangle ABO$ ($|BO|=R$, $|OA|=a$), получим $\frac{R}{\sin 3\varphi}=\frac{a}{\sin\varphi}$, откуда $\cos 2\varphi=\frac{R-a}{2a}$, и при $a>\frac{R}{3}$ можно найти φ.

Ответ: указанное множество состоит из точек, расположенных вне окружности радиуса $R/3$.

220. Если A — данная точка, $\widehat{PDA}=90°$, AD параллельна данным прямым, $\widehat{AEN}=90°$ (рис. 57), то $|DA|=|AE|\cdot\sqrt{3}$, т. е. D — фиксированная точка.

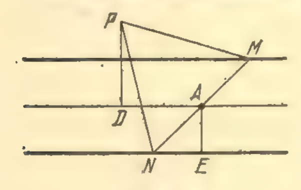


Рис. 57.

Искомое множество — две прямые, перпендикулярные данным прямым.

221. Если прямая AB не параллельна l, то существует две окружности, проходящие через A и B и касающиеся l. Пусть их центры — O_1 и O_2. Искомое множество есть прямая O_1O_2, исключая интервал (O_1, O_2). Если AB параллельна l, искомое множество состоит из одного луча, перпендикулярного l.

222. а) Пусть (рис. 58) A — вершина некоторого треугольника. Продолжим отрезок AM за M на величину $|MN|=\frac{1}{2}|AM|$. Точка N является серединой стороны, противоположной вершине A; следовательно, N должна находиться внутри описанной окружности, т. е. внутри окружности с центром в O и радиусом $|OA|$. Опустим из O перпендикуляр OR на AN. Должно выполняться неравенство $|AR|>|RN|$. Если $\widehat{AMO}\geqslant 90°$, это неравенство выполняется автоматически. Если же $\widehat{AMO}<90°$, то должно быть $|AM|-|MR|>|MN|+|MR| \Rightarrow |AM|-\frac{1}{2}|AM|>2|MR| \Rightarrow |AM|>4|MR|$. Но R лежит на окружности α с диаметром OM; значит, A должна быть вне окружности, гомотетичной окружности α с коэффициентом 4 и центром гомотетии в M. Далее, точка N не должна попасть на окружность α, так как в противном случае сторона треугольника, серединой которого она является, будучи перпендикулярной ON, лежала бы на прямой AN, т. е. все вершины треугольника были бы на одной прямой.

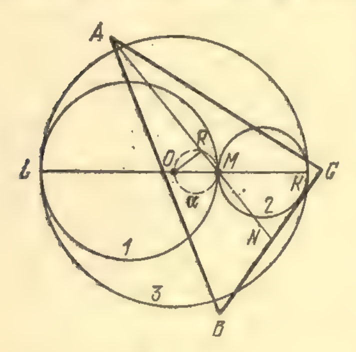


Рис. 58.

Следовательно, A не должна лежать на окружности, гомотетичной α с центром гомотетии M и коэффициентом -2.

Таким образом, если мы возьмем на прямой OM последовательно точки L и K так, что $|LO|:|OM|:|MK|=3:1:2$, и построим как на диаметре на LM — окружность 1, на MK — окруж-

ность 2, то искомым множеством будут все точки вне окружности 1, исключая точки окружности 2, кроме точки K (точка K входит в наше множество).

б) Если O — центр описанного круга, M — центр тяжести треугольника, то K (см. пункт а)) будет точкой пересечения высот треугольника (см. задачу 20, раздел I). Но для тупоугольного треугольника расстояние от центра описанного круга до точки пересечения высот больше радиуса описанного круга. Следовательно, вершины тупоугольного треугольника находятся внутри окружности 3, построенной на LK как на диаметре, вне окружности 1, исключая точки окружности 2 (при этом вершины тупых углов находятся внутри окружности 2).

223. Пусть (рис. 59) ABC — исходный правильный треугольник, $A_1B_1C_1$ — произвольный треугольник ($A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel AB$),

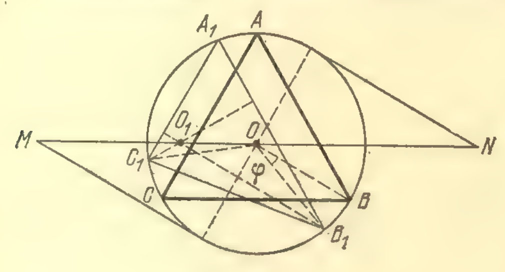


Рис. 59.

O — центр круга, O_1 — точка пересечения высот $\triangle A_1B_1C_1$. Пусть $\widehat{BOB_1} = \varphi$. Поскольку $O_1B_1 \parallel OB$, $\widehat{OB_1O_1} = \varphi$; так как $\widehat{C_1O_1B_1} = \widehat{C_1OB_1} = 120^\circ$, четырехугольник $C_1O_1OB_1$ вписан в некоторую окружность, и, значит, $\widehat{O_1OC_1} = \widehat{O_1B_1C_1} = 30^\circ - \varphi$. Таким образом, $\widehat{O_1OB} = \varphi + 120^\circ + 30^\circ - \varphi = 150^\circ$, т. е. прямая OO_1 параллельна CB. Для того чтобы определить, сколь далеко точка O_1 может «уйти» по этой прямой, заметим, что для определения положения точки O_1 нужно через переменную точку B_1 провести прямую, параллельную OB, до пересечения с прямой, проходящей через O параллельно CB. Наиболее удаленные точки, очевидно, получатся для концов диаметра, перпендикулярного OB. Таким образом, искомым множеством будет MN — отрезок прямой, параллельной CB, длиной $4R$ с серединой в O, а все множество будет состоять из трех таких отрезков.

224. Если (рис. 60) ABC — данный треугольник и вершина описанного прямоугольника $AKLM$ совпадает с A (B — на KL, C — на LM), то L принадлежит полуокружности с диаметром BC, причем углы ABL и ACL тупые, т. е. у L будет два крайних положения: L_1 и L_2, $\widehat{L_1CA} = \widehat{L_2BA} = 90^\circ$, центр же O будет описывать дугу, гомотетичную $\smile L_1L_2$ с центром гомотетии в A и коэффициентом 1/2.

Ответ: если треугольник остроугольный, то искомое множество есть криволинейный треугольник, образованный дугами

полуокружностей, построенных на средних линиях как на диаметрах и обращенных внутрь треугольника из средних линий.

Если же треугольник не остроугольный, то искомое множество состоит из двух дуг полуокружностей, построенных таким же образом на двух меньших средних линиях.

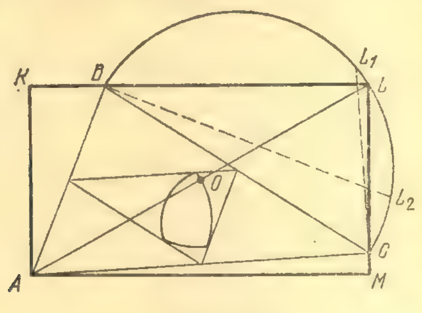


Рис. 60.

225. Если (рис. 61) мы повернем первый квадрат вокруг точки M на 60° или по часовой стрелке, или против, то он должен целиком попасть внутрь второго. Обратно, каждому квадрату, расположенному внутри большего, равному меньшему, стороны которого образуют углы в 30° и 60° со сторонами большего,

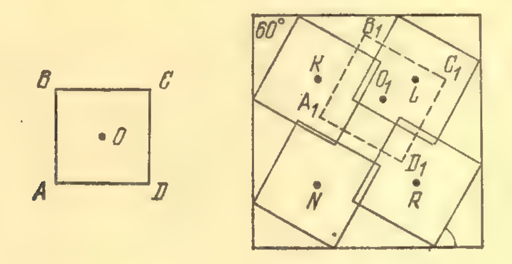


Рис. 61.

соответствует точка M, обладающая нужным свойством. (На рисунке этот квадрат обозначен штриховой линией.) Эта точка будет центром поворота на 60°, переводящего квадрат $ABCD$ в квадрат $A_1B_1C_1D_1$, ее можно получить из O_1 поворотом в нужном направлении на 60° вокруг O. Рассмотрим крайние положения квадратов $A_1B_1C_1D_1$ (когда две вершины попадают на стороны большего). Их центры служат вершинами квадрата $KLRN$, сторона которого соответственно равна $b - \frac{1}{2}a(\sqrt{3}+1)$ (стороны квадрата $KLRN$ параллельны сторонам данных квадратов, центр совпадает с центром большего). Таким образом, искомое множество состоит из объединения двух квадратов, один из которых получен

из квадрата $KLRN$ поворотом вокруг O на 60° в одном направлении, другой — поворотом на 60° в противоположном направлении.

Задача имеет решение, если $b \geqslant \frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)$ (точки P и Q могут быть на границе своих квадратов).

226. Такая точка M одна (рис. 62) — центр тяжести треугольника (точка пересечения медиан). Легко видеть, что в этом случае для любой точки N на границе треугольника в качестве точки P можно взять одну из вершин треугольника.

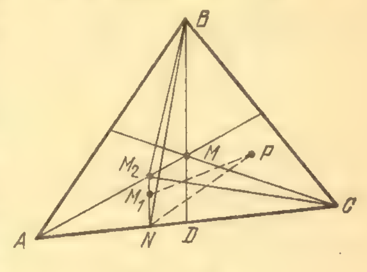


Рис. 62.

Возьмем какую-либо другую точку M_1. Будем считать, что эта точка находится внутри или на границе $\triangle AMD$, где M — центр тяжести $\triangle ABC$, D — середина AC. Проведем через M_1 прямую, параллельную BD, и в качестве N возьмем точку пересечения этой прямой с AD, а через M_2 обозначим ее пересечение с AM. Очевидно, для любой точки P внутри или на границе треугольника площадь $\triangle M_1NP$ не превосходит площади одного из треугольников AM_2N, M_2NC, M_2NB. Очевидно также, что $S_{AM_2N} < S_{AMD} = \frac{1}{6}S$. Далее, если $|AD| = |DC| = a$, $|ND| = x$, то

$$\frac{S_{M_2NC}}{S_{MDC}} = \frac{|M_2N|}{|MD|} \cdot \frac{|NC|}{|DC|} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \leqslant 1.$$

Наконец,

$$\frac{S_{M_2NB}}{S_{AMD}} = \frac{|M_2N|}{|MD|} \cdot \frac{|ND|}{|AD|} = \frac{(a-x)x}{a^2} < 1.$$

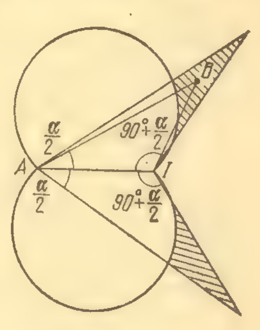


Рис. 63.

227. Если A, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — углы $\triangle ABC$, то углы $\triangle ABI$ равны $\frac{\hat{A}}{2}$, $\frac{\hat{B}}{2}$, $90° + \frac{\hat{C}}{2}$ (рис. 63); следовательно, искомое множество, изображенное на рис. 63, — пара треугольников, две стороны которых — отрезки прямых, а третья — дуга, являющаяся частью сегмента, построенного на AI и вмещающего угол $\alpha/2$.

228. Восставим к BM в точке M перпендикуляр, пусть P — точка пересечения этого перпендикуляра и восставленного к исходной прямой в точке B. Покажем, что величина $|PB|$ постоянна. Пусть $\widehat{MBC} = \varphi$; через K и L обозначим основания перпендикуляров, опущенных из A и C на MB. По условию $\frac{|MK|}{|KA|} + \frac{|LM|}{|LC|} = k$, но $|LC| = |BC| \sin\varphi$, $|AK| = |BA| \sin\varphi$.

Значит,

$$\frac{|MK|}{|BA|\sin\varphi}+\frac{|LM|}{|BC|\sin\varphi}=k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{|BM|\pm|BK|}{|BA|\sin\varphi}+\frac{|BM|\mp|BL|}{|BC|\sin\varphi}=k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{|BM|}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{|BA|}+\frac{1}{|BC|}\right)\pm\left(\frac{|BK|}{|BA|\sin\varphi}-\frac{|BL|}{|BC|\sin\varphi}\right)=k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{|BM|}{\sin\varphi}=\frac{k|BA|\cdot|BC|}{|BA|+|BC|}\Leftrightarrow|PB|=\frac{k|BA|\cdot|BC|}{|BA|+|BC|},$$

что и требовалось.

Следовательно, искомое множество состоит из двух окружностей, касающихся прямой AC в точке B, с диаметрами, равными $k\dfrac{|BA|\cdot|BC|}{|BA|+|BC|}$.

229. Продолжим AQ за точку Q и возьмем на этом луче точку M так, что $|QM|=\frac{1}{2}|AQ|$, и точку A_1 так, что $|MA_1|=|AM|$; M — середина стороны BC треугольника ABC; $\widehat{CBA_1}=\widehat{BCA}$, $\widehat{ABA_1}=180°-\widehat{BAC}$.

Следовательно, если мы построим на AM, MA_1 и AA_1 как на диаметрах окружности, то искомое множество будет состоять из точек, расположенных вне первых двух и внутри третьей окружности.

230. Разберите 4 случая: треугольник ABC — остроугольный, один из углов A, B или C — тупой. Во всех случаях можно выразить величины углов треугольника ABH через углы треугольника ABC.

231. Если концы лучей не совпадают, то искомое множество состоит из частей следующих линий: биссектрис двух углов, образованных прямыми, содержащими данные лучи, серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему концы лучей, и двух парабол (парабола есть множество точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой).

Если концы лучей совпадают, то искомое множество состоит из биссектрисы угла, образованного лучами, и части плоскости внутри угла, образованного перпендикулярами, восставленными в концах лучей.

232. Проведем через вершины треугольника ABC прямые, параллельные противоположным сторонам. Они образуют $\triangle A_1B_1C_1$, подобный $\triangle ABC$; он получается из $\triangle ABC$ с помощью гомотетии, центр которой — в общем для $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ центре тяжести, а коэффициент равен -2. Точка пересечения высот для $\triangle ABC$ является центром описанной около $\triangle A_1B_1C_1$ окружности. Следовательно, точка O — центр описанной окружности, G — центр тяжести и H — точка пересечения высот лежат на одной прямой, причем $|OG|=\frac{1}{2}|GH|$, G — на отрезке OH.

233. При доказательстве используется тот факт, что если из какой-либо точки P опустить перпендикуляры PK и PL на прямые,

пересекающиеся в точке M, то P, K, L и M будут лежать на одной окружности *) (см. также задачу 157).

234. Воспользуйтесь результатом задачи 62.

235. Поскольку середина FH лежит на окружности девяти точек (см. задачу 162), нам достаточно показать, что и прямая Симсона, соответствующая точке F, делит FH пополам. Пусть K — проекция F на какую-либо сторону треугольника, D — основание высоты, проведенной к той же стороне, H_1 — точка пересечения этой высоты с описанной окружностью, $|H_1D| = |HD|$ (см. задачу 108), L — точка пересечения прямой Симсона с той же высотой и, наконец, M — точка на прямой HH_1, для которой $FM \parallel KD$; тогда $\triangle FMH_1 = \triangle KDL$ ($|FM| = |KD|$, оба прямоугольные и $\widehat{DLK} = \widehat{MH_1F}$, поскольку высота треугольника является прямой Симсона, соответствующей вершине, из которой она выходит, и можно воспользоваться утверждением задачи 234). Нетрудно также показать, что направления $\overrightarrow{H_1M}$ и $\overrightarrow{DL}$ совпадают, т. е. $FKHL$ — параллелограмм, откуда и следует наше утверждение.

236. Покажите, что требуемым свойством обладает такая точка P на прямой Эйлера, для которой $|PO| = |OH|$ (O — центр описанного круга, H — точка пересечения высот); при этом для каждого треугольника расстояние от центра тяжести до противоположной вершины исходного треугольника равно $\frac{4}{3}R$, где R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

237. Пусть C_1 — центр описанной около $\triangle APB$ окружности, а C_2 — точка, симметричная C_1 относительно AB. Аналогично для треугольников BPC и CPA определим точки A_1 и A_2, B_1 и B_2. Поскольку треугольники AC_1B, AC_2B, BA_1C, BA_2C, CB_1A, CB_2A равнобедренные, с углами при вершинах по 120°, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — правильные (см. задачу 158). Подсчитав углы четырехугольника с вершинами P, A_2, B_2, C_2, можно доказать, что эти точки (P, A_2, B_2, C_2) лежат на одной окружности. Далее, если H — точка пересечения высот треугольника APB, то, поскольку $|PH| = |C_1C_2|$ и, значит, PHC_2C_1 — параллелограмм, прямая C_1H (прямая Эйлера треугольника APB) проходит через середину PC_2. Но PC_2 — хорда окружности с центром C_1, следовательно, C_1H перпендикулярна PC_2. Таким образом, три наших прямых Эйлера совпадают с серединными перпендикулярами отрезков PC_2, PB_2 и PA_2, а поскольку точки P, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности, эти прямые пересекаются в ее центре — центре правильного треугольника $A_2B_2C_2$. Из результата задачи 161 следует, что эти три прямые Эйлера пересекаются в точке пересечения медиан треугольника ABC.

238. Необходимым и достаточным условием выполнения всех четырех пунктов является равенство $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$. Для пунктов а) и б) это следует из теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника, для пунктов в) и г) — из результата задачи 50.

---

*) Более подробно о семействе прямых Симсона можно прочесть в книге: *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.* Прямые и кривые. — М.: Наука, 1978.

239. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Будем считать, что углы A и D — тупые, B и C — острые. Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из вершины A, через M и N, а из вершины C — через K и L (рис. 64, *а*), R — точка пересечения MN и LK. Заметим, что A, K, N, C, L, M лежат на одной окружности с диаметром AC. Покажем, что $MK \parallel LN$: $\widehat{MKL} = \widehat{MAL} = \hat{D} - 90° = 90° - \hat{B} = \widehat{KCB} = \widehat{KLN}$ ($\hat{D}$ и $\hat{B}$ — углы четырехугольника). Таким образом,

$$\frac{|MR|}{|RN|} = \frac{|MK|}{|LN|} = \frac{\sin \widehat{MCK}}{\sin \widehat{LAN}} =$$

$$= \frac{\sin(\hat{C} - 90° + \hat{B})}{\sin(\hat{A} - 90° + \hat{B})} = \frac{\sin(90° - \hat{A} + \hat{B})}{\sin(\hat{A} + \hat{B} - 90°)} = \frac{\cos(\hat{A} - \hat{B})}{\sin(\hat{A} + \hat{B} - 90°)}.$$

Пусть теперь P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B, а S — точка пересечения MN и PQ (рис. 64, *б*). Так

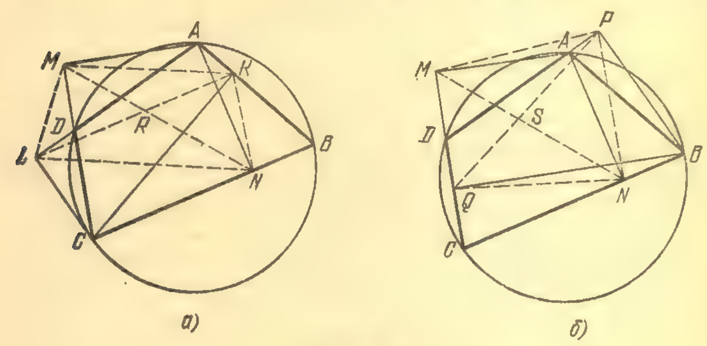


Рис. 64.

как $\widehat{PNB} = \widehat{PAB} = \hat{C}$, то $PN \parallel DC$, т. е. $MQNP$ — трапеция ($ANBP$ — вписанный четырехугольник с диаметром AB). Таким образом,

$$\frac{|MS|}{|SN|} = \frac{|MQ|}{|PN|} = \frac{|AB|\cos(\hat{A} + \hat{D} - 180°)}{|AB|\sin(\hat{B} + \hat{A} - 90°)} = \frac{\cos(\hat{A} - \hat{B})}{\sin(\hat{B} + \hat{A} - 90°)}.$$

(Мы использовали то, что MQ — проекция AB на DC: угол между AB и DC равен $\hat{A} + \hat{D} - 180°$.) Итак, точки R и S делят MN в одном и том же отношении, т. е. они совпадают; значит, три прямые пересекаются в одной точке. Легко теперь показать, что все четыре прямые пересекаются в этой же точке.

240. Найдем, в каком отношении BC делит MN. Это отношение равно отношению

$$\frac{S_{MCB}}{S_{CBN}} = \frac{|MC| \cdot |CB| \sin \widehat{MCB}}{|BN| \cdot |CB| \sin \widehat{NBC}} = \frac{|MC| \cos \widehat{BCD}}{|BN| \cos \widehat{CBA}}.$$

Аналогично, отношение, в котором AD делит MN, равно $\frac{|AM|\cos\widehat{BAD}}{|ND|\cos\widehat{ADC}}$. Но эти отношения равны, так как $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}$, $\widehat{CBA}=\widehat{CDA}$, а $\triangle AMC$ подобен $\triangle BND$, и, следовательно, $\frac{|MC|}{|BN|}=\frac{|AM|}{|ND|}$.

241. Поскольку окружность с диаметром CD проходит через фиксированную точку A на MN ($MN \perp CD$), то

$$|CN|\cdot|ND|=|NA|^2 \quad (1)$$

есть величина постоянная. Обозначим через K точку пересечения PQ с MN. Покажем, что $\frac{|NK|}{|KM|}$ — величина постоянная. Заметим, что $\widehat{PNQ}=180°-\widehat{PMQ}$; значит,

$$\frac{|MK|}{|KN|}=\frac{S_{\triangle PMQ}}{S_{\triangle PQN}}=\frac{|PM|\cdot|MQ|}{|PN|\cdot|NQ|}=\frac{|MN|}{|CN|}\cdot\frac{|MN|}{|ND|}=\frac{|MN|^2}{|AN|^2}$$

(мы воспользовались равенством (1) и тем, что $\triangle MNP$ подобен $\triangle MNC$, а $\triangle MNQ$ подобен $\triangle MND$).

242. Проверьте, что точки A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 находятся на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$ (O_1, O_2, O_3 — центры окружностей) или на продолжении этих сторон и отношение расстояний от каждой из этих точек до соответствующих вершин треугольника $O_1O_2O_3$ равно отношению радиусов соответствующих окружностей. Далее можно воспользоваться теоремой Менелая (см. задачу 193) для каждой из этих троек точек.

243. Пусть O — центр вписанной окружности, K и L — точки касания со сторонами AC и AB, прямая, проходящая через N параллельно BC, пересекает стороны AB и AC в точках R и M. Четырехугольник $OKMN$ — вписанный ($\widehat{ONM}=\widehat{OKM}=90°$), следовательно, $\widehat{OMN}=\widehat{OKN}$; аналогично $\widehat{ORN}=\widehat{OLN}$, но $\widehat{OLN}=\widehat{OKN}$, значит, $\widehat{ORN}=\widehat{OMN}$ и $\triangle ORM$ — равнобедренный, ON — высота; таким образом,

$$|RN|=|NM|.$$

244. Если стороны $\triangle ABC$ равны $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$, то, как мы знаем (см. задачу 18, раздел I), $|MC|=\frac{a+b-c}{2}$. Проведем через K прямую, параллельную AC, обозначим ее точки пересечения с AB и BC через A_1 и C_1. Окружность, вписанная в $\triangle ABC$, является вневписанной (касается A_1C_1 и продолжений BA_1 и BC_1) для $\triangle A_1BC_1$. Но $\triangle A_1BC_1$ подобен $\triangle ABC$. Следовательно, окружность, вневписанная в ABC, будет касаться AC в точке N; обозначим точки касания ее с продолжениями BA и BC через R и L. Имеем

$$|BR|=|BL|=\frac{1}{2}(|BR|+|BL|)=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

значит,

$$|AN|=|AR|=|RB|-|BA|=\frac{a+b-c}{2}=|MC|.$$

245. Проведем через K прямую, параллельную BC. Обозначим через L и Q точки пересечения касательной в точке P с прямой BC и построенной прямой, ей параллельной, а через N — точку пересечения AK с BC. Так как $|CN|=|BM|$ (см. задачу 244), то нам достаточно доказать, что $|NL|=|LM|$, но $|PL|=|LM|$, значит, нужно доказать, что $|PL|=|NL|$. Поскольку $\triangle PLN$ подобен $\triangle PQK$, в котором $|PQ|=|QK|$, то $|PK|=|NL|$ и $|CL|=|LB|$.

246. Пусть M и N — точки пересечения прямой LK с прямыми l и CD. Тогда $|AM|^2=|ML|\cdot|MK|$. Из подобия треугольников KMB и DKN следует $\frac{|MK|}{|KN|}=\frac{|MB|}{|DN|}$, $|MK|=\frac{|KN|\cdot|MB|}{|DN|}$. Из подобия треугольников CNL и MLB следует $\frac{|ML|}{|LM|}=\frac{|MB|}{|CN|}$, $|ML|=\frac{|LN|\cdot|MB|}{|CN|}$.

Таким образом,

$$|MK|\cdot|ML|=\frac{|KN|\cdot|LN|}{|CN|\cdot|DN|}|MB|^2=|MB|^2,$$

т. е. $|MA|^2=|MB|^2$, $|MA|=|MB|$.

247. Пусть (рис. 65) B — вторая общая точка окружностей, C — точка на прямой AB, из которой проведены касательные, и, наконец, K — точка пересечения прямых MN и PQ. Воспользовавшись теоремой синусов и результатом задачи 50, получим

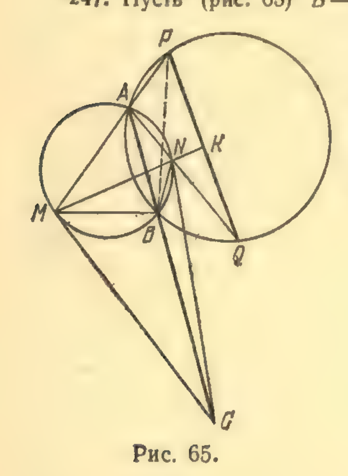


Рис. 65.

$$\frac{|PM|}{|MA|}=\frac{|PM|}{\sin\widehat{PBM}}\cdot\frac{\sin\widehat{PBM}}{|MA|}=$$

$$=\frac{|BM|}{\sin\widehat{BPM}}\cdot\frac{\sin\widehat{PBM}}{|MA|}=$$

$$=\frac{|BM|}{|MA|}\cdot\frac{\sin\widehat{PBM}}{\sin\widehat{BPM}}=$$

$$=\sqrt{\frac{|CB|}{|CA|}}\cdot\frac{\sin\widehat{PBM}}{\sin\widehat{BPM}}.$$

Таким образом, обозначив через α угол $\widehat{AMB}$, а через β — угол $\widehat{APB}$ (α и β постоянны), получим

$$\frac{|PM|}{|MA|}=\sqrt{\frac{|CB|}{|CA|}}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

Аналогично найдем

$$\frac{|AN|}{|NQ|}=\sqrt{\frac{|CA|}{|CB|}}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Но по теореме Менелая (см. задачу 193) $\frac{|PM|}{|MA|}\cdot\frac{|AN|}{|NQ|}\cdot\frac{|QK|}{|KP|}=1$. Значит, $\frac{|QK|}{|KP|}=1$.

248. Проведем через M прямую, параллельную AC, до пересечения в точках A_1 и C_1 с прямыми BA и BC. Имеем $\widehat{A_1KM}=90°-\widehat{DKM}=90°-\widehat{KBD}=\widehat{BAD}=\widehat{KA_1M}$, следовательно, $\triangle KMA_1$ — равнобедренный и $|A_1M|=|MK|$. Аналогично $|MC_1|=|ML|$, но $|KM|=|ML|$, значит, $|A_1M|=|MC_1|$, т. е. прямая BM делит AC пополам.

249. Пусть M — точка пересечения ND и AB, а P — точка пересечения касательных к окружности в точках A и D. Поскольку прямые NC, AB и PD параллельны, из подобия соответствующих треугольников получим

$$\frac{|AM|}{|DP|}=\frac{|AN|}{|NP|},\quad |AM|=|DP|\frac{|AN|}{|NP|},\qquad (1)$$

$$\frac{|MB|}{|NC|}=\frac{|MD|}{|ND|}=\frac{|AP|}{|NP|},\quad |MB|=|NC|\frac{|AP|}{|NP|},\qquad (2)$$

но $|DP|=|AP|$, $|NC|=|AN|$, следовательно, правые части выражений (1) и (2) равны, т. е. $|AM|=|MB|$.

250. Будем считать, что D — середина CB и AD пересекает вторично окружность в точке K. Докажем, что касательные к окружности в точках B и C пересекаются на прямой MK.

Рассмотрим четырехугольник $CMBK$. Для того чтобы касательные к окружности в точках C и B пересекались на диагонали MK, необходимо и достаточно (см. задачу 238), чтобы $\frac{|CM|}{|CK|}=\frac{|MB|}{|BK|}$, но $\frac{|CM|}{|CK|}=\frac{|AB|}{|CK|}=\frac{|BD|}{|DK|}=\frac{|CD|}{|DK|}=\frac{|AC|}{|BK|}=\frac{|MB|}{|BK|}$. (В первом и последнем равенстве использовалось то, что, ввиду параллельности AM и CB, $|CM|=|AB|$, $|AC|=|MB|$; во втором и четвертом — подобия $\triangle ABD$ и $\triangle CDK$, $\triangle ADC$ и $\triangle KDB$; в третьем — то, что AD — медиана.)

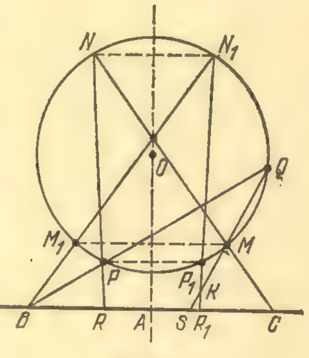


Рис. 66.

251. Пусть O — центр окружности, N_1, M_1, P_1, R_1 — точки, симметричные точкам N, M, P, R соответственно относительно прямой OA, K — точка пересечения прямых N_1R_1 и QS. Нам нужно доказать, что точки R_1, S и K совпадают. Точки N_1, M_1 и B лежат на одной прямой, симметричной прямой NMC; N_1, P_1, R_1 — также на одной прямой, симметричной прямой NPR (рис. 66). Точки B, N_1, Q и K лежат на одной окружности, так как $\widehat{BN_1K}=\widehat{M_1N_1P_1}=\widehat{MNP}=\widehat{PQM}=\widehat{BQK}$. Точки B, N_1, Q, R_1 — также на одной окружности, поскольку $\widehat{N_1R_1B}=\widehat{N_1P_1P}=\widehat{N_1QP}=\widehat{N_1QB}$.

Следовательно, пять точек B, N_1, Q, R_1, K — на одной окружности, но точки N_1, R_1 и K — на одной прямой, значит, R_1 и K сливаются.

252. Пусть (рис. 67) O — середина AB, N_1 и N_2 — точки касания окружностей O_1 и O_2 с AB, O_3 — середина O_1O_2, N_3 — основание перпендикуляра, опущенного из O_3 на AB, a и b — катеты треугольника ($|CB|=a$, $|AC|=b$), c — гипотенуза, r_1 и r_2 — радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2. Докажем, что $|AN_2|=|AC|=b$, $|BN_1|=|BC|=a$. Обозначим $|BN_1|=x$, $|BD|=\frac{a^2}{c}$, $|N_1D|=r_1=$ $=x-\frac{a^2}{c}$, $|OO_1|=\frac{c}{2}-r_1=\frac{c}{2}-x+\frac{a^2}{c}$, $|N_1O|=x-\frac{c}{2}$. Запишем теорему Пифагора для $\triangle OO_1N_1$:

$$\left(\frac{c}{2}-x+\frac{a^2}{c}\right)^2=\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2,$$

откуда $x^2=a^2$, $x=a$, т. е. $r_1=a-\frac{a^2}{c}$. Аналогично $|AN_2|=b$, $r_2=b-\frac{b^2}{c}$. Теперь легко найдем

$$|O_3N_3|=\frac{r_1+r_2}{2}=\frac{a+b-\frac{a^2}{c}-\frac{b^2}{c}}{2}=\frac{a+b-c}{2}=r,$$

где r — радиус вписанной окружности, а

$$|AN_3|=\frac{1}{2}(|AN_1|+|AN_2|)=\frac{1}{2}[c-|BN_1|+b]=\frac{1}{2}[b+c-a],$$

т. е. N_3 совпадает с точкой касания вписанной окружности.

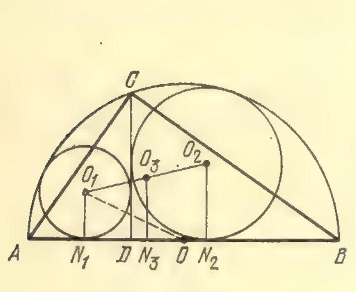


Рис. 67.

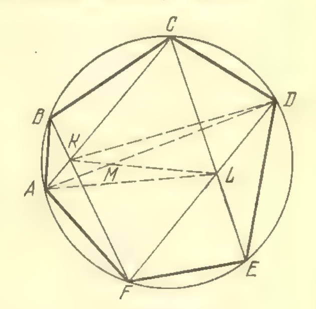


Рис. 68.

253. Пусть (рис. 68) M — точка пересечения AD и KL;

$$\frac{|KM|}{|ML|}=\frac{S_{AKD}}{S_{ALD}}=\frac{\frac{1}{2}|AK|\cdot|AD|\sin\widehat{KAD}}{\frac{1}{2}|DL|\cdot|AD|\sin\widehat{ADL}}=\frac{|AK|\cdot|CD|}{|DL|\cdot|AF|}.$$

(Мы воспользовались тем, что синусы вписанных углов пропорциональны хордам.) Аналогично, если M_1 — точка пересечения BE

и KL, получим, что $\frac{|KM_1|}{|M_1L|}=\frac{|BK|\cdot|FE|}{|LE|\cdot|BC|}$. Но из подобия $\triangle AKF$ и $\triangle BKC$, $\triangle CLD$ и $\triangle FLE$ имеем $\frac{|AK|}{|AF|}=\frac{|BK|}{|BC|}$, $\frac{|CD|}{|DL|}=\frac{|FE|}{|LE|}$; перемножая эти равенства, получим, что $\frac{|KM|}{|ML|}=\frac{|KM_1|}{|M_1L|}$, т. е. M и M_1 совпадают.

Замечание. Можно показать, что утверждение задачи сохраняет силу, если A, B, C, D, E и F — произвольные шесть точек на окружности.

254. Обозначим через L и P точки пересечения прямых AM и AN с окружностью. Как следует из задачи 253, прямые BL, DP и MN пересекаются в одной точке. Но BL и DP — диаметры, пересекаются в центре окружности, следовательно, MN проходит через центр окружности.

255. Докажем, что центр искомой окружности совпадает с ортоцентром (точкой пересечения высот). Пусть BD — высота, H — точка пересечения высот, а K и L — середины построенных отрезков, выходящих из вершины B, $|BK|=|BL|=l$, M — середина BD (рис. 69). Тогда

$$|KH|^2=|LH|^2=|MH|^2+|KM|^2=l^2-|BM|^2+|MH|^2=$$
$$=l^2-\frac{|BD|^2}{4}+\left(|BH|-\frac{|BD|}{2}\right)^2=l^2+|BH|^2-|BH|\cdot|BD|=$$
$$=l^2-|BH|(|BD|-|BH|)=l^2-|BH|\cdot|HD|.$$

Нам осталось доказать, что произведения отрезков высот, на которые каждая делится их точкой пересечения, равны. Проведем высоту AE. Ввиду подобия $\triangle BHE$ и $\triangle AHD$ имеем $|BH|\times\times|HD|=|AH|\cdot|HE|$, что и требовалось.

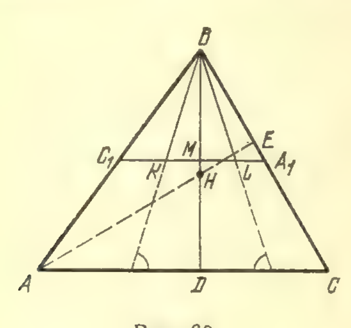


Рис. 69.

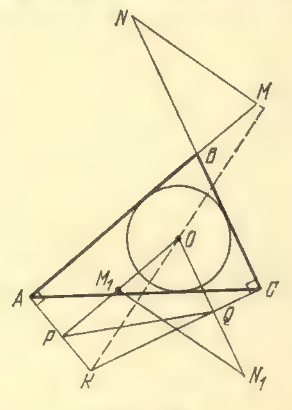


Рис. 70.

256. Обозначим (рис. 70) длины сторон треугольника ABC: $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$. Проведем через центр вписанной окружности прямые, параллельные AB и BC, до пересечения с AK и KC в точках P и Q; в треугольнике OPQ имеем $\widehat{POQ}=\hat{B}$,

$|OQ| = \frac{a+b-c}{2} = p-c$, $|OP| = \frac{b+c-a}{2} = p-a$, но по условию $\widehat{NBM} = \hat{B}$, $|NB| = p-a$, $|MB| = p-c$. Следовательно, $\triangle POQ = \triangle NBM$. Если мы на прямой OP возьмем M_1 так, что $|OM_1| = |OQ|$, а на OQ — точку N_1 так, что $|ON_1| = |OP|$, то $\triangle ON_1M_1 = \triangle NBM$ и соответствующие стороны BM и OM_1, BN и ON_1 окажутся параллельными. Значит, $N_1M_1 \parallel NM$. Докажем, что $OK \perp NM$: так как в четырехугольнике $OPKQ$ два противоположных угла прямые, то он вписанный, следовательно, $\widehat{OKP} = \widehat{OQP}$.

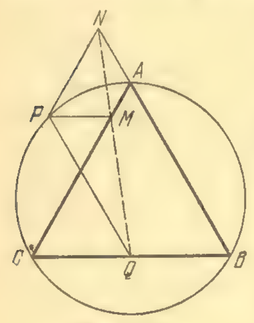


Рис. 71.

Далее, имеем $\widehat{KOP} + \widehat{OM_1N_1} = \widehat{KOP} + \widehat{OQP} = \widehat{KOP} + \widehat{OKP} = 90°$, а это означает, что $OK \perp M_1N_1$.

257. Пусть для определенности P лежит на дуге $\overset{\frown}{AC}$ (рис. 71). Точки A, M, P, N лежат на одной окружности, значит, $\widehat{NMP} = \widehat{NAP}$. Аналогично, P, M, Q, C — на одной окружности, $\widehat{PMQ} = 180° - \widehat{PCQ} = 180° - \widehat{PAN} = 180° - \widehat{PMN}$.

258. Рассмотрим сначала предельный случай, когда точка N находится в «бесконечности»; в этом случае прямые AN, BN и CN параллельны прямой l. Пусть расстояния от точек A, B и C до прямой l равны a, b и c (для удобства предположим, что A, B и C — по одну сторону от l). Прямые, параллельные l и проходящие через A, B и C, пересекают прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2. Легко видеть, что $\frac{|A_1C_2|}{|C_2B_1|} = \frac{a+c}{c+b}$, $\frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|} = \frac{b+a}{a+c}$, $\frac{|C_1B_2|}{|B_2A_1|} = \frac{c+b}{b+a}$. Перемножая эти равенства, получим, что выполняется утверждение теоремы Менелая — задача 193 (необходимо еще проверить, что на продолжениях сторон треугольника $A_1B_1C_1$ находится нечетное число точек из A_2, B_2, C_2). Значит, точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

Общий случай можно свести к рассмотренному, например, спроектировав заданное расположение треугольников из какой-либо точки пространства на другую плоскость. При этом можно добиться, чтобы симметричность треугольников не нарушалась, а точка N перешла бы в бесконечность.

Можно не прибегать к пространственным рассмотрениям. Введем систему координат, выбрав за ось x прямую l и взяв начало координат в точке N. Сделаем преобразование $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{y}{x}$. При этом точки оси x ($y=0$) перейдут в прямую $y'=0$; точки, симметричные относительно оси x, перейдут в симметричные относительно прямой $y'=0$; прямые перейдут в прямые; прямые, проходящие через начало координат, перейдут в прямые, параллельные прямой $y'=0$ (это преобразование, по существу, и есть вышеуказанное проектирование). После такого преобразования получим уже рассмотренное расположение.

259. Пусть данные взаимно перпендикулярные прямые — оси $x=0$ и $y=0$ прямоугольной системы координат, высоты треугольника лежат на прямых $y=k_i x$ ($i=1, 2, 3$), стороны треугольника при этом должны иметь угловые коэффициенты $-\frac{1}{k_i}$, а из условия принадлежности вершин (x_i, y_i) высотам находим отношения свободных членов c_i в уравнениях сторон $k_i y + x = c_i$: $c_1 = k_1 y_3 + x_3$, $c_2 = k_2 y_3 + x_3$, $y_3 = k_3 x_3 \Longrightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_1 k_3 + 1}{k_2 k_3 + 1}$ и т. п. При подходящем выборе единицы длины можно взять $c_i = \frac{k_i}{k+k_i}$, где $k = k_1 k_2 k_3$. Точки пересечения прямой $k_i y + x = \frac{k_i}{k+k_i}$ с осями: $\left(0;\ \frac{1}{k+k_i}\right)$ и $\left(\frac{k_i}{k+k_i};\ 0\right)$, середина P_i отрезка между ними $\left(\frac{k_i}{2(k+k_i)};\ \frac{1}{2(k+k_i)}\right)$. Угловой коэффициент прямой P_1P_2 равен

$$\left(\frac{1}{2(k+k_2)} - \frac{1}{2(k+k_1)}\right) : \left(\frac{k_2}{2(k+k_2)} - \frac{k_1}{2(k+k_1)}\right) =$$

$$= (k_1 - k_2) : (kk_2 - kk_1) = -\frac{1}{k}.$$

Точно такими же будут угловые коэффициенты прямых P_2P_3 и P_3P_1. Поэтому точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой (ее уравнение: $ky + x = 1/2$).

Соединив прямыми точку H пересечения высот треугольника с точками P_1, P_2, P_3, получаем такое любопытное следствие. Пусть α_1, α_2, α_3 — углы треугольника, перечисленные против часовой стрелки, a_1, a_2, a_3 — прямые, на которых лежат противоположные им стороны; через точку H проходят три прямые p_1, p_2, p_3 так, что углы между p_2 и p_3, p_3 и p_1, p_1 и p_2 (отсчитываемые против часовой стрелки) равны соответственно α_1, α_2, α_3. Тогда точки пересечения p_1 с a_1, p_2 с a_2, p_3 с a_3 лежат на одной прямой. Предлагаем читателю рассмотреть частные случаи этой теоремы (многие из них — красивые и далеко не очевидные геометрические факты) и сопоставить ее с задачей 207.

Еще одно замечание: в нашей задаче вместо середин отрезков, высекаемых на сторонах треугольника, можно было бы брать точки, делящие их в одинаковых отношениях. Эти точки также окажутся на одной прямой.

260. Пусть (рис. 72) ABC — данный треугольник, H — точка пересечения его высот. Заметим, что точки, симметричные H относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC (см. задачу 108). Если H_1 — точка, симметричная H относительно стороны BC, то прямая l_1, симметричная l относительно той же стороны, проходит через H_1. При повороте l вокруг H на угол φ прямая l_1 повернется вокруг H_1 на тот же

Рис. 72.

угол φ в противоположном направлении. Следовательно, если P — вторая точка пересечения прямой l_1 с описанной окружностью, то радиус OP (O — центр описанной окружности) повернется на угол 2φ вокруг O в соответствующем направлении. Те же рассуждения справедливы и для двух других прямых, симметричных l. Но если l совпадает с какой-либо высотой треугольника, то утверждение задачи очевидно (точка P совпадет с соответствующей вершиной треугольника). Следовательно, это утверждение справедливо всегда.

261. Рассмотрим общий случай произвольных окружностей. Пусть точки F и F' расположены, как показано на рис. 73. Обозначения понятны из рисунка. Докажем, что существует окружность, вписанная в четырехугольник $AKBM$, после чего воспользуемся результатом задачи 242. Для этого достаточно доказать, что

$$|BF|+|BF'|=|AF'|+|FA|. \qquad (1)$$

Учитывая, что $|BL|=|BT|$, а $|FS|=|FT|$, получим $|BF|=|BL|-|FS|$ и аналогично $|FA|=|FQ|-|AE|$, $|BF'|=|F'P|-|BL|$, $|F'A|=|AE|-|F'R|$. Подставляя эти выражения в (1), получим

$$|BL|-|FS|+|F'P|-|BL|=$$
$$=|FQ|-|AE|+|AE|-|F'R| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |F'R|+|F'P|=|FQ|+|FS| \Rightarrow |PR|=|SQ|.$$

Точно так же разбираются остальные случаи расположения точек F и F' на касательных (при этом учитываем результаты задач 155,

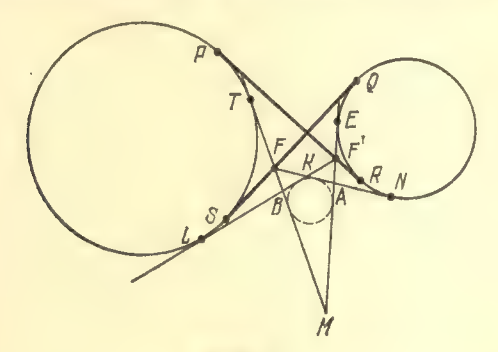


Рис. 73.

156). Поскольку каждая касательная точками касания и точкой пересечения разделена на 4 части, то таких случаев будет $\frac{1}{2}\cdot 4^2=8$.

Для доказательства второй части заметим, что середины AB, FF' и центр третьей окружности O_3, вписанной в $AKBM$, лежат на одной прямой (см. задачу 217).

Но поскольку радиусы данных окружностей равны, то AB параллельна O_1O_2 (O_1, O_2 — центры данных окружностей); A и B

лежат на прямых O_1O_3, O_2O_3. Значит, прямая, проходящая через O_3 и середину AB, делит O_1O_2 пополам.

262. Обозначим через H точку пересечения высот треугольника ABC, а через A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH. Заметим, что треугольники AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C подобны между собой (соответственные вершины обозначены одинаковыми буквами), причем A_2, B_2 и C_2 — соответственно центры описанных около них окружностей. Докажем сначала следующее утверждение: три прямые, проходящие через точки A_2, B_2 и C_2 и одинаково расположенные относительно треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, пересекаются в одной точке на окружности девяти точек.

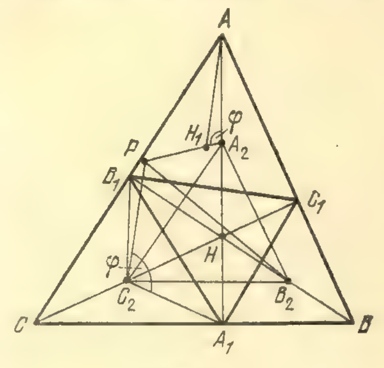


Рис. 74.

Заметим, что прямые A_2B_1, B_2B и C_2B_1 одинаково расположены относительно треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C и пересекаются в точке B_1, лежащей на окружности девяти точек. Поскольку точки A_2, B_2, C_2 лежат на окружности девяти точек, то очевидно, что и три прямые, получающиеся из прямых A_2B_1, B_2B и C_2B_1 поворотом на один и тот же угол вокруг точек A_2, B_2 и C_2 соответственно, также будут пересекаться в одной точке, расположенной на окружности девяти точек.

Пусть теперь P — точка пересечения прямых Эйлера треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C. Обозначим $\widehat{PA_2A}=\varphi$. Для удобства будем считать, что треугольник ABC остроугольный, а точка P лежит на дуге $\smile{B_1A_2}$ окружности девяти точек (рис. 74).

Тогда

$$\widehat{PA_2A_1}=180°-\varphi,$$

$$\widehat{PA_2B_1}=180°-\varphi-\widehat{B_1A_2A_1}=180°-\varphi-\widehat{B_1C_1A_1}=2\hat{C}-\varphi,$$

$$\widehat{PA_2C_1}=180°-\varphi+180°-2\hat{B}=360°-\varphi-2\hat{B}.$$

Поскольку хорды $|PA_1|$, $|PB_1|$ и $|PC_1|$ пропорциональны синусам углов, на них опирающихся, нам осталось доказать, что из трех величин $\sin\varphi$, $\sin(2\hat{C}-\varphi)$, $-\sin(2\hat{B}+\varphi)$ одна (в нашем случае первая) равна сумме двух других, т. е.

$$\sin\varphi=\sin(2\hat{C}-\varphi)-\sin(2\hat{B}+\varphi).$$

Но в треугольнике AA_2H_1 $|AA_2|=R$, $|AH_1|=2R\cos\hat{A}$ (R — радиус описанной окружности, $R\cos\hat{A}$ — расстояние от центра описанного круга A_2 до B_1C_1), $\widehat{H_1AA_2}=\hat{A}\mp 2\hat{B}-180°$. По теореме

синусов для $\triangle AA_2H_1$

$$\frac{2\cos\hat{A}}{\sin\varphi} = -\frac{1}{\sin(2\hat{B}+\hat{A}+\varphi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cos\hat{A}\sin(2\hat{B}+\hat{A}+\varphi) = \sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sin(2\hat{B}+2\hat{A}+\varphi) - \sin(2\hat{B}+\varphi) = \sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(2\hat{C}-\varphi) - \sin(2\hat{B}+\varphi) = \sin\varphi,$$

что и требовалось.

Таким образом, мы доказали наше утверждение в случае остроугольного треугольника.

Случай тупоугольного треугольника ABC рассматривается точно так же.

263. Пусть D — середина AC. Восставим в D перпендикуляр к AC и обозначим через M точку пересечения его с BC. $\triangle AMC$ — равнобедренный, значит, $\widehat{MAC}=\widehat{BCA}$. По условию $\triangle ABD$ также равнобедренный, $\widehat{ABD}=\widehat{BDA}$, $\widehat{ABM}>90°$ (по условию), $\widehat{ADM}=90°$, значит, $\widehat{MBD}>\widehat{MDB}$ и $|MD|>|BM|$. Отсюда следует, что $\widehat{MAD}>\widehat{MAB}$ (если мы отобразим симметрично B относительно прямой AM, то получим точку B_1 внутри угла MAD, так как $MD \perp AD$ и $|MD|>|MB|=|MB_1|$); таким образом, $\hat{C}>\hat{A}-\hat{C}$, $\hat{C}>\frac{1}{2}\hat{A}$.

264. Если окружность касается продолжений сторон AB и AC и ее центр O, то легко найти, что $\widehat{BOC}=180°-\left(90°-\frac{\hat{B}}{2}\right)-\left(90°-\frac{\hat{C}}{2}\right)=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=90°-\frac{\hat{A}}{2}$. Таким образом, $\widehat{BOC}+\widehat{BAC}=90°+\frac{\hat{A}}{2}\neq 180°$.

265. Пусть AD — высота, AL — биссектриса, AM — медиана. Продолжим биссектрису до пересечения с описанной около треугольника окружностью в точке A_1. Поскольку $MA_1 \parallel AD$, то $\widehat{MA_1A}=\widehat{LAD}$.

Ответ: если $\alpha<90°$, то угол между медианой и биссектрисой больше, чем угол между биссектрисой и высотой. Если $\alpha>90°$ — наоборот; если $\alpha=90°$, углы равны.

266. Если AD — высота, AN — медиана, M — точка пересечения медиан, то

$$\operatorname{ctg}\hat{B}+\operatorname{ctg}\hat{C}=\frac{|DB|}{|AD|}+\frac{|CD|}{|AD|}=\frac{|CB|}{|AD|}\geqslant\frac{|CB|}{|AN|}=\frac{|CB|}{3|MN|}=\frac{2}{3}.$$

267. Из того, что $S_{BAM}=S_{BCM}$ и $|BC|>|BA|$, $|CM|>|MA|$, следует, что $\sin\widehat{BAM}>\sin\widehat{BCM}$. Значит, если углы острые, то $\widehat{BAM}>\widehat{BCM}$, тупым же может быть лишь угол BAM; таким образом, всегда $\widehat{BAM}>\widehat{BCM}$.

268. Если $|OA|=a$, R — радиус окружности, K — точка пересечения OA и DE, то легко найти, что

$$|OK|=a-\frac{a^2-R^2}{2a}=\frac{a^2+R^2}{2a}>R.$$

269. Обозначения видны на рисунках. В первом случае (рис. 75, *а*) $|AB|<|AA_1|+|A_1B_1|+|B_1B|=|AA_1|+|A_1C|+$ $+|B_1D|+|BB_1|=|AC|+|BD|$. Во втором случае (рис. 75, *б*)

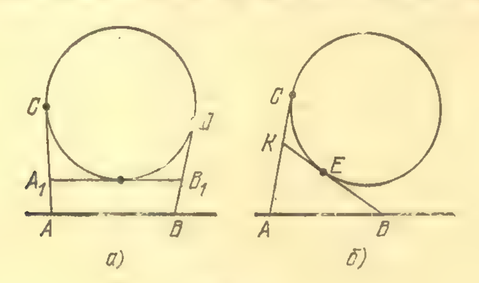


Рис. 75.

$|AB|>|BK|-|AK|>|BE|-|AC|$. Обратное утверждение легко доказывается от противного.

270. Пусть K, L и M — точки пересечения проведенных прямых с AC. Обозначим $|AC|=b$, $|BC|=a$, $|AB|=c$, $|BL|=l$. По теореме о биссектрисе внутреннего угла найдем $|LC|=\frac{ba}{a+c}$; применяя еще раз эту теорему для $\triangle BCL$, найдем

$$|LM|=|LC|\frac{|BL|}{|BL|+|BC|}=\frac{ba}{a+c}\,\frac{l}{l+a}=\frac{ba}{a+c}\left(1-\frac{a}{a+l}\right),$$

но $\widehat{BLA}=\frac{\hat{B}}{2}+\hat{C}=\frac{\pi-\hat{A}+\hat{C}}{2}>\hat{A}$ (так как $\hat{C}>3\hat{A}-\pi$), значит, $c>l$ и

$$|LM|=\frac{ba}{a+c}\left(1-\frac{a}{a+l}\right)<\frac{ba}{a+c}\left(1-\frac{a}{a+c}\right)=b\frac{ac}{(a+c^2)}\leqslant\frac{b}{4}.$$

271. Если $ABCD$ — данный четырехугольник, то возьмем четырехугольник AB_1CD, где B_1 симметрична B относительно серединного перпендикуляра к диагонали AC. Очевидно, площади $ABCD$ и AB_1CD равны, стороны AB_1CD в порядке обхода равны b, a, c, d. Неравенство $S\leqslant\frac{1}{2}(ac+bd)$ для четырехугольника AB_1CD очевидно. Равенство будет, если $\widehat{DAB_1}=\widehat{B_1CD}=90°$, т. е. четырехугольник AB_1CD — вписанный, с двумя противоположными углами по 90°; значит, $ABCD$ тоже вписан (в ту же окружность) и его диагонали перпендикулярны.

272. Рассмотрим два случая:

1) Данный треугольник ABC — остроугольный. Пусть $\hat{B}$ — наибольший угол: $60° \leqslant \hat{B} < 90°$. Поскольку биссектрисы углов A и C меньше 1, то и высоты этих углов h_A и h_C меньше 1. Имеем

$$S_{ABC} = \frac{h_A h_C}{\sin \hat{B}} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2) Если один из углов треугольника, например B, не острый, то стороны, его заключающие, меньше соответствующих биссектрис, т. е. меньше 1, а площадь не превосходит $\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|$, т. е.

$$S_{ABC} \leqslant \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

273. Пусть c — наибольшая сторона, противолежащая вершине C. Если $a^2+b^2+c^2-8R^2>0$, то $a^2+b^2>8R^2-c^2>c^2$ (так как $c<2R$), т. е. треугольник — остроугольный. Обратно, пусть треугольник — остроугольный; тогда $a^2+b^2+c^2=2m_c^2+\frac{3}{2}c^2$ (m_c — медиана к стороне c); поэтому, чем меньше медиана, тем меньше $a^2+b^2+c^2$, но медиана максимальна, если C — середина дуги, и уменьшается при перемещении C по дуге; когда же треугольник станет прямоугольным, будет $a^2+b^2+c^2-8R^2=0$.

274. Допустим противное, например, что $c \geqslant a$; тогда $2c \geqslant c+a>b$; возводя неравенства в квадрат и складывая, получаем $5c^2>a^2+b^2$ — противоречие.

275. Нетрудно доказать, что биссектриса угла B является также и биссектрисой угла OBH (то же верно и для углов OAH, OCH). На рис. 76 *а*, *б* изображены случаи остроугольного (*а*) и тупоугольного треугольников (*б*). Решение в обоих случаях одинаково.

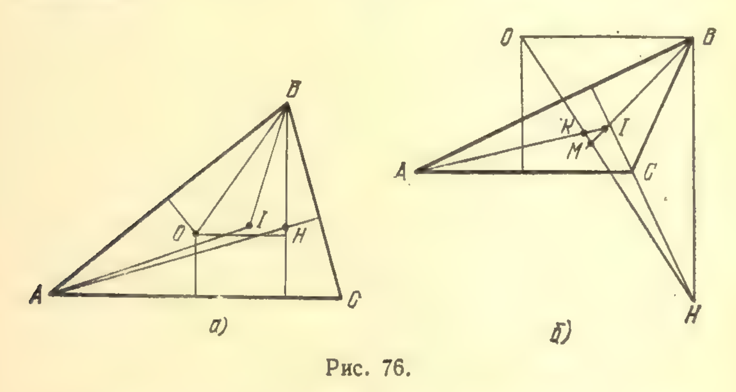


Рис. 76.

Пусть, например, $\hat{C} \geqslant 90°$ (рис. 76, *б*). Биссектриса угла B является биссектрисой OBH, а биссектриса угла A является бис-

сектрисой угла OAH. Далее, $\widehat{BAH}=90°-\hat{B}<90°-\hat{A}=\widehat{ABH}$, значит, $|AH|>|BH|$.

Если K и M — точки пересечения биссектрис углов A и B с OH, то

$$\frac{|HK|}{|KO|}=\frac{|AH|}{|AO|}=\frac{|AH|}{R}>\frac{|BH|}{R}=\frac{|BH|}{|OB|}=\frac{|HM|}{|MO|}.$$

Таким образом, $|HK|>|HM|$ и точка пересечения биссектрис углов A и B находится внутри $\triangle BOH$.

276. Обозначим $|AB|=|BC|=a$, $|AM|=c$, $|MC|=b$, $|MB|=$ $=m$, $\widehat{BMO}=\psi$, $\widehat{MBO}=\varphi$.

Нужно доказать, что $|OB|>|OM|$, или что $\psi>\varphi$, или что $\cos\psi<\cos\varphi$.

По теореме косинусов для $\triangle MBA$ и $\triangle MBC$ получим

$$\cos\psi=\frac{m^2+b^2-a^2}{2mb},\quad \cos\varphi=\frac{m^2+a^2-c^2}{2ma},$$

$$\cos\varphi-\cos\psi=\frac{m^2+a^2-c^2}{2ma}-\frac{m^2+b^2-a^2}{2mb}=$$

$$=\frac{m^2(b-a)-ab(b-a)+a^3-c^2b}{2mab}=$$

$$=\frac{m^2(b-a)-a(b^2-a^2)+b(a^2-c^2)}{2mab},$$

но $a-c=b-a$, значит,

$$\cos\varphi-\cos\psi=\frac{(b-a)(m^2-ab-a^2+ab+bc)}{2mab}=$$

$$=\frac{(b-a)(m^2-a^2-b(2a-b))}{2mab}=\frac{(b-a)(m^2-(a-b)^2)}{2mab}=$$

$$=\frac{(b-a)(m+b-a)(m-a+b)}{2mab}>0,$$

что и требовалось доказать.

277. Проведем через M прямую, параллельную AC, до пересечения с AB в точке K. Легко найдем

$$|AK|=|CM|\frac{|AB|}{|CB|},\quad |MK|=|MB|\frac{|AC|}{|CB|}.$$

Поскольку $|AM|\leqslant|AK|+|KM|$, то, заменяя $|AK|$ и $|KM|$, получим

$$|AM|\leqslant\frac{|CM|\cdot|AB|}{|BC|}+\frac{|MB|\cdot|AC|}{|CB|},$$

$$|AM|\cdot|BC|\leqslant|CM|\cdot|AB|+(|BC|-|MC|)|AC|,$$

$$(|AM|-|AC|)|BC|\leqslant(|AB|-|AC|)|MC|,$$

что и требовалось.

278. Минимум равен $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ и достигается, если M — центр тяжести $\triangle ABC$. (Это можно доказать, например, методом координат или воспользовавшись теоремой Лейбница — см. задачу 153.)

279. «Спрямим» путь шара, для чего вместо того, чтобы «отражать» шар от борта, будем отражать зеркально относительно этого борта сам биллиард. Мы получим систему лучей с общей вершиной, любые два соседних луча образуют угол α. Максимальное число лучей системы, которое может пересечь прямая, и есть максимальное число отражений шара. Это число равно $\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]+1$, если $\frac{\pi}{\alpha}$ — не целое число ($[x]$ — целая часть x); если же $\frac{\pi}{\alpha}$ — число целое, оно равно максимальному числу отражений.

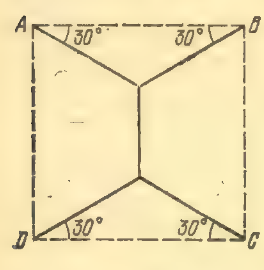


Рис. 77.

280. Если дороги построить так, как показано на рис. 77 (A, B, C и D — деревни, дороги — сплошные линии), то их суммарная длина будет $\frac{8\sqrt{3}}{3}+\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=2+2\sqrt{3}<5{,}5$. Можно показать, что указанное расположение дорог реализует минимум их суммарной длины.

281. Если одна из сторон треугольника, проходящая через A, образует угол φ с прямой, перпендикулярной данным параллельным прямым, то другая сторона будет образовывать угол $180°-\varphi-\alpha$; найдя эти стороны, получим, что площадь треугольника будет

$$-\frac{ab\sin\alpha}{2\cos\varphi\cos(\varphi+\alpha)}=-\frac{ab\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos(\alpha+2\varphi)}.$$

Это выражение минимально, если $\alpha+2\varphi=180°$.

Ответ: $S_{\min}=\frac{ab\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=ab\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

282. Поскольку $\frac{S_{ACD}}{S_{OCD}}=\frac{|AM|}{|MO|}=k$, $\frac{S_{BCD}}{S_{OCD}}=\frac{|BM|}{|OM|}=k+2$, то $S_{ACBD}=S_{ACD}+S_{BCD}=2(k+1)S_{OCD}$. Следовательно, площадь $ACBD$ будет наибольшей, когда наибольшей будет площадь треугольника COD. Но треугольник COD — равнобедренный, с боковой стороной, равной R; значит, его площадь максимальна, когда достигает максимума синус угла при вершине O. Обозначим этот угол через φ. Очевидно, $\varphi_0\leqslant\varphi<\pi$, где φ_0 соответствует случаю перпендикулярности AB и CD. Следовательно, если $\varphi_0\leqslant 90°$, то максимальная площадь $\triangle COD$ соответствует значению $\varphi_1=90°$, если же $\varphi_0>90°$, то значению φ_0.

Ответ: если $k\leqslant\sqrt{2}-1$, то $S_{\max}=(k+1)R^2$;

если $k>\sqrt{2}-1$, то $S_{\max}=\frac{2\sqrt{k(k+2)}}{k+1}R^2$.

283. Пусть M_1 и N_1 — две другие точки на сторонах угла (рис. 78). Тогда $\widehat{M_1AN_1}=\beta$, $\widehat{AM_1M}=360°-\alpha-\beta-\widehat{ON_1A}>$ $>180°-\widehat{ON_1A}=\widehat{AN_1N}$. Отсюда, учитывая, что $\widehat{M_1AM}=\widehat{N_1AN}$,

получим, что $|M_1A| < |AN_1|$ и, значит, $S_{M_1AM} < S_{AN_1N}$; таким образом, $S_{OM_1AN_1} < S_{OMAN}$.

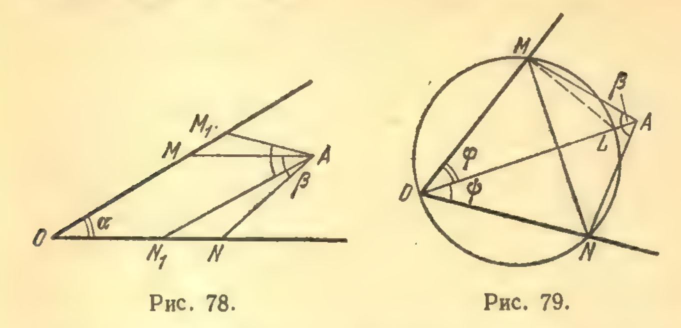


Рис. 78. Рис. 79.

284. Учитывая результат предыдущей задачи, нам нужно выяснить, при каких условиях можно найти на сторонах угла точки M и N такие, что $\widehat{MAN}=\beta$ и $|MA|=|AN|$. Опишем около треугольника MON окружность (рис. 79). Поскольку $\varphi+\psi+\beta<180°$, точка A будет вне ее. Если L — точка пересечения прямой OA с окружностью, то должны выполняться неравенства $\widehat{AMN}=90°-\frac{\beta}{2}>\widehat{LMN}=\widehat{LON}$ и $\widehat{ANM}=90°-\frac{\beta}{2}>\widehat{LOM}$. Таким образом, если выполняются условия

$$\begin{cases} \varphi<90°-\frac{\beta}{2}, \\ \psi<90°-\frac{\beta}{2}, \end{cases}$$

можно найти точки M и N такие, что $|MA|=|AN|$ и $\widehat{MAN}=\beta$.

Если же условия не выполняются, таких точек найти нельзя. В этом случае четырехугольник максимальной площади вырождается в треугольник (одна из точек M или N совпадает с O).

285. Возьмем точку A_1 на BC (рис. 80). Четырехугольник OMA_1N равновелик четырехугольнику $OMAN$. $\widehat{MA_1N}<\widehat{MAN}$, следовательно, если мы возьмем точку M_1 на OB так, что $\widehat{M_1A_1N}=\widehat{MAN}$, то $S_{OM_1A_1N}>S_{OMAN}$; значит, площадь четырехугольника $OMAN$ меньше площади максимального четырехугольника, соответствующего точке A_1, что с учетом результатов двух предыдущих задач доказывает наше утверждение.

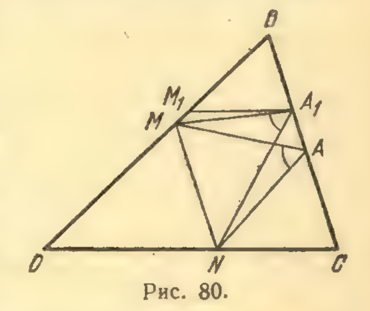


Рис. 80.

286. Пусть для определенности $\sin\alpha \geqslant \sin\beta$; возьмем на продолжении AB точку K так, что $\widehat{BKC}=\beta$ (рис. 81); так как $\widehat{CBK} = \widehat{ADC}$ (поскольку $ABCD$ — вписанный), то $\triangle KBC$ подобен $\triangle ACD$, но $|BC| \geqslant |CD|$, следовательно, $S_{BCK} \geqslant S_{ADC}$ и $S_{AKC} \geqslant S_{ABCD}$, но

$$S_{AKC}=\frac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{2\sin\beta},$$

т. е.

$$S_{ABCD} \leqslant \frac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{2\sin\beta}.$$

Аналогично доказывается, что $S_{ABCD} \geqslant \frac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}$.

Рис. 81.

287. Рассмотрите другое положение точек M_1 и N_1 ($\widehat{M_1AN_1}=\beta$) и покажите, учитывая условие $\alpha+\beta > 180°$, что «добавившийся» треугольник имеет бо́льшую площадь, чем треугольник, на который площадь уменьшается (аналогично решению задачи 283).

288. Учитывая результат задачи 287, рассуждая точно так же, как в задаче 279, получим, что, если $\varphi > 90° - \frac{\beta}{2}$ и $\psi > 90° - \frac{\beta}{2}$, четырехугольник наименьшей площади существует и для него $|MA| = |AN|$. Если же это условие не выполняется, то искомый четырехугольник вырождается (одна из точек M или N совпадает с вершиной O).

289. Возьмем точку A, для которой выполняются условия задачи, и какую-то другую точку A_1. Проведя через A_1 прямые, параллельные AM и AN, пересекающие стороны в точках M_1 и N_1, мы убедимся, что $S_{OM_1A_1N_1} < S_{OMAN}$, и, следовательно, тем более площадь минимального четырехугольника, соответствующего точке A_1, меньше площади четырехугольника $OMAN$ — минимального четырехугольника, соответствующего точке A.

290. Радиус наибольшего круга равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника со стороной $2R$, т. е. $2R/\sqrt{3}$. (Возьмем такой треугольник и на его сторонах как на диаметрах построим окружности.) Для любой окружности большего радиуса, если бы она была покрыта данными кругами, нашлась бы дуга больше чем в 120°, покрытая одним кругом, но такая дуга содержит хорду $2R$ — противоречие.

В общем случае, если существует остроугольный треугольник со сторонами $2R_1$, $2R_2$, $2R_3$, то радиус описанной около него окружности и будет искомым. Во всех остальных случаях радиус наибольшего круга равен наибольшему из чисел R_1, R_2, R_3.

291. Можно. На рис. 82 показаны три квадрата, покрывающие квадрат со стороной $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} > \frac{5}{4}$.

292. Заметим сначала, что сторона наименьшего правильного треугольника, покрывающего ромб со стороной a и острым углом 60°, равна $2a$. В самом деле, если вершины острых углов M и N ромба находятся на сторонах AB и BC правильного треугольника ABC и $\widehat{BNM}=\alpha$, $90°\geqslant\alpha\geqslant 30°$, то, найдя $|BN|$ по теореме синусов из $\triangle BNM$ и $|CN|$ по теореме синусов из $\triangle KNC$ (K — вершина тупого угла ромба, которая, можно считать, расположена на стороне AC), получим для $|BC|$ после преобразований выражение $|BC| = 2a\dfrac{\cos(60°-\alpha)}{\cos 30°}$; учитывая, что $30°\leqslant\alpha\leqslant 90°$, найдем, что $|BC|\geqslant 2a$.

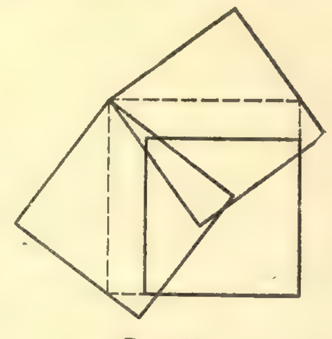


Рис. 82.

Легко видеть, что правильный треугольник со стороной 3/2 можно покрыть тремя правильными треугольниками со стороной 1. Для этого каждый единичный треугольник положим так, чтобы одна его вершина совместилась с одной из вершин покрываемого треугольника, а середина противоположной стороны совпала бы с центром покрываемого треугольника.

Покажем теперь, что правильный треугольник со стороной $b>3/2$ нельзя покрыть тремя правильными единичными треугольниками. Если бы такое покрытие было бы возможно, то вершины A, B и C были бы покрыты разными треугольниками, а каждая из сторон AB, BC, CA покрывалась бы двумя треугольниками. Пусть A принадлежит треугольнику I, B — II, C — III, центр треугольника O принадлежит, например, треугольнику I. Возьмем на AB и AC точки M и N так, что $|AM|=|AN|=\frac{1}{3}b$. Поскольку $|BM|=|CN|=\frac{2}{3}b>1$, точки M и N также принадлежат треугольнику I и, следовательно, ромб $AMON$ целиком покрыт треугольником, сторона которого меньше $2|AM|>1$, что невозможно.

293. Обозначим отношения $\frac{|AM|}{|MC|}$, $\frac{|CN|}{|NB|}$ и $\frac{|ML|}{|LM|}$ через α, β и γ. Тогда будем иметь (см. решение задачи 35) $\frac{P}{Q}=\alpha\beta\gamma$, $S=Q(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$. Затем воспользуемся неравенством

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\geqslant(\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+1)^3.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ II

1. Две вершины треугольника, центр вписанной окружности и точка пересечения высот лежат на одной окружности. Известны также радиусы вписанной и описанной окружностей — R и r. Найти периметр треугольника.

2. В треугольнике ABC помещены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найти радиусы этих окружностей, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны r и R.

3. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника радиус окружности, касающейся его катетов и описанной окружности (изнутри), равен диаметру вписанной окружности.

4. Задача Архимеда. Пусть A, B и C — три последовательные точки на прямой. Фигура, ограниченная дугами трех полуокружностей с диаметрами AB, BC и CA, расположенными по одну сторону от прямой ABC, носит название сапожный нож или арбелос Архимеда. Доказать, что радиусы двух окружностей, каждая из которых касается двух полуокружностей и прямой, перпендикулярной AC и проходящей через B, равны между собой.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает прямые AB и AD в точках K и L. Площади треугольников KBC и CDL равны P и Q. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

6. Доказать, что если треугольник, составленный из медиан данного треугольника, является тупоугольным, то меньший угол исходного треугольника меньше 45°.

7. Через точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая AB

в точке M и CD в точке N. Через M и N проведены прямые, соответственно параллельные CD и AB и пересекающие AC и BD в точках E и F. Доказать, что BE параллельна CF.

8. На сторонах выпуклого четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Доказать, что если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, проходят через точку пересечения диагоналей четырехугольника.

9. На прямой расположены последовательно точки A, B, C и D так, что $|BC|=2|AB|$, $|CD|=|AC|$. Одна окружность проходит через точки A и C, а другая — через точки B и D. Доказать, что общая хорда этих окружностей делит отрезок AC пополам.

10. Доказать, что проекции основания высоты на стороны, ее заключающие, и на две другие высоты лежат на одной прямой.

11. Три равные окружности проходят через точку H. Доказать, что H является точкой пересечения высот треугольника, вершины которого совпадают с тремя другими точками попарного пересечения окружностей.

12. Четыре равные окружности проходят через одну точку A. Доказать, что три отрезка, концы каждого из которых отличны от A и являются точками пересечения двух окружностей (противоположные концы каждого отрезка не принадлежат одной окружности), пересекаются в одной точке.

13. Доказать, что если центры квадратов, построенных на сторонах данного треугольника во внешнюю сторону, служат вершинами треугольника, площадь которого в два раза больше площади данного, то центры квадратов, построенных на сторонах треугольника во внутрь его, лежат на одной прямой.

14. В треугольнике ABC угол между медианой и высотой, выходящими из угла A, равен α, угол между медианой и высотой, выходящими из угла B, равен β. Найти угол между медианой и высотой, выходящими из угла C.

15. Радиус круга, описанного около треугольника, равен R. Расстояние от центра этого круга до точки пересечения медиан треугольника равно d. Найти произведение площади данного треугольника и треуголь-

ника, образованного прямыми, проходящими через его вершины перпендикулярно медианам, из этих вершин выходящим.

16. Точки A_1, A_3 и A_5 расположены на одной прямой, а точки A_2, A_4, A_6 на другой прямой, пересекающейся с первой. Найти угол между этими прямыми, если известно, что стороны шестиугольника (возможно самопересекающегося) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ равны между собой.

17. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются изнутри окружности радиуса R с центром O. Известно, что $|O_1O_2|=a$. Общая внутренняя касательная к первым двум окружностям пересекается с их общими внешними касательными в точках M и N и пересекается с большей окружностью в точках A и B. Найти отношение $|AB|:|MN|$, если

а) отрезок O_1O_2 содержит точку O;

б) окружности с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга.

18. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B взята точка D так, что $|BD|=|CD|$. Точно так же на продолжении стороны CB за точку B взята точка F так, что $|BF|=|AB|$. Доказать, что точки A, C, D и F лежат на одной окружности, центр которой находится на окружности, описанной около треугольника ABC.

19. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки M на стороны BC, CA, AB соответственно треугольника ABC. Доказать, что три прямые, проходящие через середины отрезков B_1C_1 и MA, C_1A_1 и MB, A_1B_1 и MC, пересекаются в одной точке.

20. Даны треугольник ABC и произвольная точка P. Основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны треугольника ABC, служат вершинами треугольника $A_1B_1C_1$. Вершинами треугольника $A_2B_2C_2$ служат точки пересечения прямых PA, PB и PC с окружностью, описанной около треугольника ABC, отличные от точек A, B и C. Доказать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. При каком положении точки P эти треугольники будут подобны треугольнику ABC?

21. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки M и N, делящие их в одина-

ковом отношении (считая от вершин A и C). Эти точки соединены со всеми вершинами четырехугольника, в результате чего $ABCD$ разбит на шесть треугольников и один четырехугольник. Доказать, что площадь получившегося четырехугольника равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к сторонам BC и AD.

22. В окружности проведены диаметр AB и не пересекающая его хорда CD. Пусть E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую CD. Доказать, что площадь четырехугольника $AEFB$ равна сумме площадей треугольников ACB и ADB.

23. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF. Прямая, перпендикулярная AD и проходящая через середину AD, пересекает AC в точке P. Прямая, перпендикулярная BE и проходящая через середину BE, пересекает AB в точке Q. Наконец, прямая, перпендикулярная CF и проходящая через середину CF, пересекает CB в точке R. Доказать, что треугольники DEF и PQR равновелики.

24. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке M, стороны BC — в точке N; биссектриса угла A пересекает прямую MN в точке K, а биссектриса угла B пересекает прямую MN в точке L. Доказать, что из отрезков MK, NL и KL можно сложить треугольник. Найти площадь этого треугольника, если площадь треугольника ABC равна S, угол $\hat{C}$ равен α.

25. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ взяты две точки M и N так, что $|BM|+|BN|=|AB|$. Доказать, что прямые DM и DN делят диагональ AC на три отрезка, из которых можно сложить треугольник, причем один угол этого треугольника равен 60°.

26. Дан треугольник ABC. Прямая l пересекает стороны BC, CA и AB (или их продолжения) в точках K, L и M. P — произвольная точка. Прямые PK, PL и PM вторично пересекают окружности, описанные около треугольников PBC, PCA и PAB, в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что точки A_1, B_1, C_1 и P расположены на одной окружности.

27. Доказать, что три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника, основание высоты, опущенной из этой вершины, и касается радиуса описанного около треугольника круга, проведенного в эту вершину, пересекаются в двух

точках, расположенных на прямой Эйлера данного треугольника.

28. Рассмотрим три окружности, каждая из которых проходит через одну вершину треугольника и основания двух биссектрис — внутренней и внешней, выходящих из этой вершины (эти окружности носят название *окружностей Аполлония*). Доказать, что

а) эти три окружности пересекаются в двух точках M_1 и M_2;

б) прямая M_1M_2 проходит через центр круга, описанного около данного треугольника;

в) основания перпендикуляров, опущенных из точек M_1 и M_2 на стороны треугольника, служат вершинами двух правильных треугольников.

29. Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Доказать, что прямая, соединяющая центры тяжести двух противоположных треугольников, перпендикулярна к прямой, соединяющей точки пересечения высот двух других треугольников.

30. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим четыре окружности, каждая из которых касается трех сторон этого четырехугольника.

а) Доказать, что центры этих окружностей лежат на одной окружности.

б) Пусть r_1, r_2, r_3, r_4 — радиусы этих окружностей (r_1 — не касается стороны DC, аналогично r_2 — не касается стороны DA, r_3 — AB, r_4 — BC). Доказать, что $\frac{|AB|}{r_1}+\frac{|CD|}{r_3}=\frac{|BC|}{r_2}+\frac{|AD|}{r_4}$.

31. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята произвольная точка M. Доказать, что $|S_{MAB}\times$ $\times S_{MCD}-S_{MBC}\cdot S_{MDA}|=S_{MAC}\cdot S_{MBD}$.

32. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Четыре окружности касаются данной в точках A, B, C и D. Пусть a, b, c, d, m и n — длины общих внешних касательных к окружностям, касающимся данной в точках A и B, B и C, C и D, D и A, A и C, B и D соответственно. *Доказать,* что $mn=ac+bd$ (обобщенная *теорема Птолемея*)

33. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=$ $=|BC|$) D — середина AC, E — проекция D на BC, F — середина DE. Доказать, что прямые BF и AE перпендикулярны.

34. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1, а окружность, касающаяся стороны BC и продолжений AB и AC, касается прямых AB и AC в точках C_2 и B_2. Пусть D — середина BC. Прямая AD пересекается с прямыми B_1C_1 и B_2C_2 в точках E и F. Доказать, что $BECF$ — параллелограмм.

35. Даны точка A и прямая l. B — произвольная точка l. Найти геометрическое место точек M таких, что ABM — правильный треугольник.

36. Дан правильный треугольник ABC. На продолжении его сторон AB и AC за точки B и C взяты точки D и E так, что $|BD|\cdot|CE|=|BC|^2$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых DC и BE.

37. Дана окружность с центром O и точка A. Пусть B — произвольная точка окружности. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к окружности в точке B с прямой, проходящей через O перпендикулярно AB.

38. Даны окружность и две точки A и B на ней. Пусть N — произвольная точка прямой AB. Построим две окружности, каждая из которых проходит через точку N и касается данной: одна в точке A, а другая в точке B. Обозначим через M вторую точку пересечения этих окружностей. Найти геометрическое место точек M.

39. Стороны треугольника являются диагоналями трех параллелограммов, стороны которых параллельны двум заданным прямым плоскости. Доказать, что три диагонали этих параллелограммов, отличные от сторон треугольника, пересекаются в одной точке M. Найти геометрическое место точек M, если эти параллелограммы становятся прямоугольниками.

40. Пусть B и C — две фиксированные точки окружности. A — произвольная точка этой окружности. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, D — точка пересечения биссектрисы угла BAC с окружностью, M — проекция H на AD. Найти геометрическое место точек M.

41. Даны два правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Найти геометрическое место таких точек M, что два треугольника, составленных из отрезков MA, MB, MC и MA_1, MB_1, MC_1 соответственно, равновелики.

42. Доказать, что в треугольнике ABC биссектриса угла A, средняя линия, параллельная BC, и прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC, пересекаются в одной точке.

43. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC построены треугольники A_1BC, B_1CA и C_1AB так, что $\widehat{A_1BC}=\widehat{C_1BA}$, $\widehat{C_1AB}=\widehat{B_1AC}$, $\widehat{B_1CA}=\widehat{A_1CB}$. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

44. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, а на сторонах B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взяты точки A_2, B_2, C_2. Известно, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, а также, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 тоже пересекаются в одной точке. Доказать, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке (или параллельны).

45. Дан треугольник ABC, A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA и AB, K и L — основания перпендикуляров, опущенных из вершин B и C на прямые A_1C_1 и A_1B_1 соответственно, O — центр окружности девяти точек (см. задачу 162). Доказать, что прямая A_1O делит отрезок KL пополам.

46. Пусть точки A_1, B_1, C_1 симметричны некоторой точке P относительно сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Доказать, что

а) окружности, описанные около треугольников A_1BC, AB_1C, ABC_1, имеют общую точку;

б) окружности, описанные около треугольников A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1, имеют общую точку.

47. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, E — произвольная точка прямой AB, F — произвольная точка прямой DC. Прямая AF пересекает окружность в точке M, прямая DE — в точке N. Доказать, что прямые BC, EF и MN пересекаются в одной точке или параллельны.

48. AB — диаметр полукруга, M — точка на AB. C, D, E и F — такие точки полуокружности, что $\widehat{CMD}=\widehat{EMF}$, $\widehat{CMA}=\widehat{FMB}$. Пусть P — точка пересечения прямых CD и EF. Доказать, что прямая PM перпендикулярна AB.

49. Дан выпуклый четырехугольник Q_1. Прямые, перпендикулярные его сторонам и проходящие через

середины сторон, образуют четырехугольник Q_2. Точно так же для четырехугольника Q_2 образован четырехугольник Q_3. Доказать, что четырехугольник Q_3 подобен исходному четырехугольнику Q_1.

50. Дан треугольник ABC, углы которого равны α, β и γ. Треугольник DEF описан около треугольника ABC так, что вершины A, B и C находятся соответственно на сторонах EF, FD и DC, причем $\widehat{ECA} = \widehat{DBC} = \widehat{FAB} = \varphi$. Определить значение угла φ, при котором площадь треугольника EFD достигает наибольшего значения.

51. Перпендикуляр, восставленный к стороне AB треугольника ABC в ее середине D, пересекает окружность, описанную около ABC в точке E (C и E — по одну сторону от AB). F — проекция E на AC. Доказать, что прямая DF делит периметр треугольника ABC пополам и что три такие прямые, построенные для каждой стороны треугольника, пересекаются в одной точке.

52. Доказать, что прямая, делящая периметр и площадь треугольника в одинаковом отношении, проходит через центр вписанной окружности.

53. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что площадь треугольника $A_1B_1C_1$ не меньше, чем площадь хотя бы одного из трех треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C.

54. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $|CM|^2 = |AM| \cdot |BM|$. Доказать, что таких точек M будет соответственно 2, 1 или 0 в зависимости от того, будет ли выражение $a + b - c\sqrt{2}$ меньше, равно или больше нуля ($|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$).

55. Пусть O, I, H — соответственно центры описанной, вписанной окружности и точка пересечения высот некоторого треугольника. Доказать, что $|OH| \geqslant |IH| \cdot \sqrt{2}$.

56. Доказать, что периметр треугольника, вершинами которого являются основания высот данного остроугольного треугольника, не превосходит половины периметра данного треугольника.

57. Доказать, что треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, будет ли его полупериметр соответственно

больше, равен или меньше суммы диаметра описанного круга и радиуса вписанного.

58. Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Будет ли верным утверждение, что и данный треугольник является равнобедренным?

59. Доказать, что прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника, является прямой Эйлера треугольника (см. задачу 232) с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.

60. Дан треугольник ABC со сторонами $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$. Пусть M — произвольная точка внутри него. Обозначим через x, y, z расстояния от M до вершин A, B и C, а через u, v, w — расстояния от M до сторон BC, CA, AB. Доказать, что выполняются следующие неравенства:

а) $ax+by+cz \geqslant 4S$ (S — площадь треугольника);

б) $x+y+z \geqslant 2(u+v+w)$ (*Эрдеш*);

в) $xyz \geqslant (u+v)(v+w)(w+u)$;

г) $x+y+z \geqslant 6r$ (r — радиус вписанной окружности).

61. Доказать, что касательная к параболе в ее вершине является прямой Симсона треугольника, образованного при пересечении любых трех других касательных к той же параболе (*Шюллер*).

62. Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Доказать, что

а) если одна прямая параллельна прямой Эйлера треугольника, образованного тремя другими прямыми, то этим же свойством обладает и любая другая прямая;

б) точки пересечения высот получившихся треугольников лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Гаусса (см. задачу 202).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ

1. $2\sqrt{3}(R+r)$. 2. $\frac{Rr}{R+r}$. 5. $2\sqrt{PQ}$.

10. Воспользуйтесь тем, что четыре рассматриваемых точки, основание высоты, концы основания лежат на двух окружностях, имеющих основание высоты общей точкой.

11. Докажите, что радиус окружности, описанной около рассматриваемого треугольника, равен радиусу данных окружно-

стей, а эти окружности симметричны описанной окружности относительно сторон треугольника.

12. Докажите, что любые два отрезка делятся пополам своей точкой пересечения.

14. Докажите, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{|b^2-c^2|}{2S}$, где S — площадь треугольника. (Аналогично для других углов.)

Ответ: $\operatorname{arctg}|\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta|$.

15. Докажите, что площадь треугольника, образованного прямыми, проходящими через вершины данного треугольника перпендикулярно соответствующим медианам, равна $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{12S}$.

Ответ: $\frac{27}{4}(R^2-d^2)$.

16. 60°.

17. Ответ: $\frac{2R}{a}$ (для обоих пунктов).

18. Докажите, что центр этой окружности лежит в середине дуги $\breve{ABC}$.

19. Рассматриваемые прямые являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.

20. Для определения углов треугольника $A_1B_1C_1$ воспользуйтесь тем, что точки P, A_1, B_1, C лежат на одной окружности (так же для других четверок точек). В то же время можно доказать, что углы треугольника $A_2B_2C_2$ равны углам между касательными к окружностям, описанным около треугольников ABP, BCP и CAP, проходящими через точку P.

23. Отрезки $|AP|$, $|BQ|$ и $|CR|$ можно выразить через стороны треугольника. Например, $|AP|=\frac{bc}{b+c}$.

24. $\widehat{AKB}=90°$ (см. задачу № 70). Пусть R — точка пересечения BK и AC, Q — точка на BK такая, что $NQ\parallel AC$. Тогда $|AR|=|AB|=c$, $|MR|=c-(p-a)=p-b=|NB|$, $\frac{|MK|}{|KN|}=$
$=\frac{|MR|}{|QN|}=\frac{|NB|}{|QN|}=\frac{|CB|}{|RC|}=\frac{a}{b-c}$ (считаем $b>c$).

Поскольку $|MN|=2(p-c)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, найдем $|MK|=a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. Аналогично для других отрезков. Искомый треугольник подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\sin\frac{\alpha}{2}$. Его площадь равна $S\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

25. Все отрезки диагонали легко «считаются». Тем не менее хотелось бы предложить читателю следующее «забавное» решение. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда плоскость B_1MN отсечет от треугольника A_1C_1B треугольник, стороны которого равны соответствующим отрезкам диагонали AC. Но A_1C_1B — правильный треугольник.

26. Если бы точка P не находилась в плоскости треугольника ABC, то утверждение задачи было бы очевидным, поскольку точки P, A_1, B_1, C_1 в этом случае будут принадлежать сече-

нию сферы, описанной около пирамиды $PABC$, плоскостью, проходящей через P и прямую l. Наша задача является предельной для этого случая. Осталось лишь обосновать предельный переход.

27. Пусть ABC — данный треугольник, A_1, B_1, C_1 — середины соответствующих сторон. Докажите, что окружность, проходящая, например, через вершину A и удовлетворяющая условию задачи, проходит через точки пересечения внутренней и внешней биссектрисы угла A со средней линией B_1C_1. Значит, для всех точек M этой окружности будет (см. задачу 178) выполняться равенство $|B_1M| : |C_1M| = |B_1A| : |C_1A| = b : c$. Таким образом, если M_1 и M_2 — точки пересечения двух таких окружностей, то $|A_1M_1| : |B_1M_1| : |C_1M_1| = a : b : c$ (то же для точки M_2), поэтому M_1 и M_2 будут принадлежать третьей окружности. Кроме того, M_1 и M_2 принадлежат прямой, для всех точек M которой выполняется равенство $(c^2-b^2)|A_1M|^2+(a^2-c^2)|B_1M|^2+(b^2-a^2)\times$ $\times|C_1M|^2=0$ (см. задачу 183 и ее решение). Эта прямая проходит через центр описанного около $\triangle A_1B_1C_1$ круга и через точку пересечения его медиан (проверьте это, выразив длины медиан через стороны), т. е. она совпадает с прямой Эйлера $\triangle A_1B_1C_1$, а значит, и $\triangle ABC$.

28. а) Аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче, можно доказать, что эти три окружности пересекаются в двух точках M_1 и M_2, причем $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| =$ $= bc : ac : ab$ (также для M_2).

29. Середины сторон четырехугольника образуют параллелограмм, диагонали которого параллельны отрезкам, соединяющим центры тяжести противоположных треугольников. Другой параллелограмм образуют четыре высоты рассматриваемых треугольников, выходящие из вершин четырехугольника.

Стороны первого параллелограмма параллельны диагоналям четырехугольника, а второго — им перпендикулярны. Кроме того, стороны второго параллелограмма в $\operatorname{ctg}\alpha$ раз больше соответствующих сторон первого (α — острый угол между диагоналями четырехугольника).

33. Пусть M — середина AD. Проверьте, что $|BF|^2+|FM|^2=$ $=|BM|^2$.

34. Проведите через D прямую, перпендикулярную биссектрисе угла A, обозначьте точки ее пересечения с AB и AC через K и M и докажите, что $|AK|=|AM|=\dfrac{b+c}{2}$. Поскольку $|AC_1|=$ $=|AB_1|=p-a$, $|AC_2|=|BC_2|=p$, точки K и M будут являться серединами отрезков C_1C_2 и B_1B_2.

35. Искомое геометрическое место точек состоит из двух прямых, проходящих через точку, симметричную точке A относительно прямой l, и образующих углы в 60° с прямой l.

36. Искомое множество есть дуга $\breve{BC}$ окружности, описанной около $\triangle ABC$, соответствующая центральному углу в 120°.

37. Искомое множество есть прямая — поляра точки A относительно данной окружности (см. задачу 190).

38. Углы $\widehat{AMN}$ и $\widehat{BMN}$ можно выразить через центральный угол, соответствующий $\breve{AB}$ данной окружности (необходимо разобрать различные случаи положения точки N), после чего можно определить $\widehat{AMB}$. Искомое геометрическое место есть окружность.

39. Объединение трех построенных параллелограммов представляет собой параллелограмм, описанный около данного треугольника, разделенный на четыре меньших. Нетрудно выразить отношения, в которых каждая из рассматриваемых диагоналей делится другой диагональю, через отрезки сторон большого параллелограмма.

Если параллелограммы являются прямоугольниками, то, параллельно перенеся две из трех рассматриваемых диагоналей, мы образуем из них треугольник, равный данному, а это означает, что углы между ними или равны соответствующим углам треугольника, или дополняют их до 180°. Искомое геометрическое место точек есть окружность, проходящая через середины сторон данного треугольника.

40. Докажем, что $\frac{|AM|}{|AD|} = \left|\cos\widehat{BAC}\right|$. Пусть O — центр окружности, P — середина BC, K — середина AH. Треугольники DOA и MKA подобны. Значит, $\frac{|MA|}{|AD|} = \frac{|AK|}{|DO|} = \frac{|OP|}{|OB|} = \left|\cos\widehat{BAC}\right|$. Искомое геометрическое место точек есть окружность.

41. Воспользуйтесь результатами задач 154 и 175. Искомое множество, вообще говоря, состоит из прямой и окружности.

43. Пусть A_2 — точка пересечения AA_1 и BC. Проведем через A_1 прямую, параллельную BC, и обозначим точки ее пересечения с AC и AB через K и M. Тогда $\frac{|BA_2|}{|A_2C|} = \frac{|A_1M|}{A_1K} = \frac{|A_1M|}{A_1B} \times \frac{|A_1B|}{|A_1C|} \cdot \frac{|A_1C|}{|A_1K|}$. Заменив три последних отношения отношениями синусов соответствующих углов, проделав то же самое для точек B_1 и C_1, воспользуемся теоремой Чевы (см. задачу 192).

44. Если A_3 — точка пересечения прямой AA_2 с BC_1, то отношение $|BA_3|:|A_3C|$ можно выразить через отношения, в которых разделены стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ точками A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Проделав то же для всех вершин, можно проверить выполнение условий теоремы Чевы (см. задачу 192).

45. Ограничимся случаем, когда ABC — остроугольный треугольник. Рассмотрим параллелограмм A_1MON (M и N на A_1B_1 и A_1C_1). Поскольку A_1O образует с A_1C_1 и A_1B_1 углы $(90° - \hat{B})$ и $(90° - \hat{C})$, будем иметь $\frac{|A_1M|}{|A_2N|} = \frac{|A_1M|}{|MO|} = \frac{\cos\hat{B}}{\cos\hat{C}} = \frac{|A_1L|}{|A_1K|}$.

57. Заменив R и r по формулам $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$, воспользуйтесь для S формулой Герона и равенством

$$4S^2\left(p - \frac{abc}{2S} - \frac{S}{p}\right)\left(p + \frac{abc}{2S} + \frac{S}{p}\right) = (2pS)^2 - \left(abc + \frac{2S^2}{p}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2).$$

58. Пусть ABC — данный треугольник. AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы. Если $|A_1B_1| = |A_1C_1|$, то или $\widehat{A_1B_1C} = \widehat{A_1C_1B}$ (в этом

случае $\triangle ABC$ будет равнобедренным), или $\widehat{A_1B_1C}+\widehat{A_1C_1B}=180°$. Во втором случае повернем $\triangle A_1B_1C$ вокруг точки A_1 на угол $\widehat{B_1A_1C_1}$. В результате треугольники A_1C_1B и A_1B_1C окажутся приложенными друг к другу и образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$. Если стороны $\triangle ABC$ есть a, b и c, то стороны получившегося треугольника будут равны $\frac{ac}{b+c}$, $\frac{ab}{b+c}$ и $\frac{ac}{a+b}+\frac{ab}{a+c}$.

Учитывая подобие, получим между a, b и c соотношение $\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=\frac{a}{b+c}\Longrightarrow$

$$b^3+c^3-a^3+b^2c+b^2a+c^2b+c^2a-a^2b-a^2c+abc=0. \qquad (1)$$

Обозначим $\cos\widehat{BAC}=x$; по теореме косинусов $b^2+c^2-a^2=2bcx$. Умножая последнее равенство последовательно на a, b и c и вычитая из (1), получим $2x(a+b+c)+a=0\Longrightarrow a=-\frac{2(b+c)\cdot x}{2x+1}$. Поскольку $0<a<b+c$,

$$-\frac{1}{4}<x<0. \qquad (2)$$

Заменив в теореме косинусов a через b, c и x и обозначив $\frac{b}{c}=\lambda$, получим для λ уравнение

$$(4x+1)\lambda^2-2\lambda(4x^3+8x^2+x)+4x+1=0.$$

Для того чтобы это уравнение при условиях (2) имело решение $\lambda>0$, $\lambda\neq 1$, должны выполняться неравенства

$$4x^3+8x^2+x>0, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{4}D=(4x^3+8x^2+x)^2-(4x+1)^2=$$

$$=(2x+1)^2(x+1)(2x-1)(2x^2+5x+1)>0. \qquad (4)$$

Система неравенств (2), (3), (4) удовлетворяется при $-\frac{1}{4}<x<\frac{\sqrt{17}-5}{4}$.

Таким образом, исходный треугольник не обязательно равнобедренный. Однако мы доказали, что это может иметь место только в том случае, когда один из углов исходного треугольника тупой и его косинус находится в интервале $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$, что соответствует для угла интервалу приблизительно (102°40′; 104°28′). Для одного конца интервала $\left(-\frac{1}{4}\right)$ построенный нами треугольник будет вырождаться, другой же конец $\left(\frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$ соответствует равенству $\widehat{A_1B_1C}=\widehat{A_1C_1B}=90°$, т. е. два случая, которые мы выделили в начале решения, для этого значения угла совпадают.

59. Пусть ABC — данный треугольник, стороны которого a, b и c, причем $a \geqslant b \geqslant c$, A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности, I — центр вписанной, O — центр описанной окружности. Поскольку I по отношению к $\triangle A_1B_1C_1$ является центром описанной окружности, нам достаточно доказать, что прямая IO проходит через точку пересечения высот $\triangle A_1B_1C_1$. Отложим на лучах AC и BC — отрезки AK и BL, $|AK| = |BL| = c$, а на лучах AB и CB — отрезки $|AN| = |CN| = b$. Как мы знаем (см. задачу 138), прямая IO перпендикулярна LK и MN, значит, $LK \parallel MN$. Обозначим $\widehat{KLC} = \widehat{BNM} = \varphi$. По теореме синусов для треугольников KLC и BMN будем иметь

$$\frac{|LC|}{|KC|} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{\sin(\varphi + c)}{\sin \varphi}, \quad (1)$$

$$\frac{|BN|}{|MB|} = \frac{a-b}{b-c} = \frac{\sin(B-\varphi)}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Проведем теперь в треугольнике $A_1B_1C_1$ высоту на сторону B_1C_1. Пусть Q — точка ее пересечения с прямой IO. Нам нужно доказать, что Q — точка пересечения высот $\triangle A_1B_1C_1$. Но расстояние от I до B_1C_1 есть $|IA_1| \cdot \cos \widehat{B_1A_1C_1} = r \sin \frac{\hat{A}}{2}$. Значит, должно выполняться равенство $|A_1Q| = 2r \sin \frac{\hat{A}}{2}$. Углы $\triangle QIA_1$ можно выразить через углы $\triangle ABC$ и φ, а именно $\widehat{QIA_1} = 180^\circ - \varphi$, $\widehat{QA_1I} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$. Нам нужно доказать, что

$$2 \sin \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\sin \varphi}{\sin\left(\varphi - \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}\right)} \Longleftrightarrow \sin(\varphi + \hat{C}) - \sin(\hat{B} - \varphi) = \sin \varphi.$$

Последнее равенство следует из (1) и (2).

60. Изящную идею доказательства неравенств подобного типа предложил Казаринов. (Kazarinoff Michigan Mathematical Journal, 1957, 4, N2, 97—98). Суть ее состоит в следующем. Пусть ABC — данный треугольник, M — данная точка внутри него. Возьмем на лучах AB и AC по точке B_1 и C_1. Очевидно, что сумма площадей параллелограммов, построенных на AB_1 и AM и на AC_1 и AM, равна площади параллелограмма, одна сторона которого B_1C_1, а другая параллельна AM (см. также задачу 135). Следовательно,

$$|AC_1| v + |AB_1| w \leqslant |B_1C_1| x. \quad (1)$$

а) Возьмем B_1 и C_1 совпадающими с B и C, тогда неравенство (1) даст нам $bv + cw \leqslant ax$.

Сложив три таких неравенства, получим требуемое.

б) Возьмем $|AB_1| = |AC|$, $|AC_1| = |AB|$, тогда неравенство (1) даст нам $cv + bw \leqslant ax$ или $x \geqslant \frac{c}{a} v + \frac{b}{a} w$.

Сложив три таких неравенства, получим

$$x + y + z \geqslant \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) u + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) v + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) w \geqslant 2(u + v + w).$$

Замечание. Выбирая точки по другому, можно получать различные интересные неравенства,

Игорь Федорович Шарыгин

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ (ПЛАНИМЕТРИЯ)

(Серия: «Библиотечка «Квант»»)

Редактор *И. Е. Рахлин*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Т. С. Плетнева, Т. С. Вайсберг*

ИБ № 11912

Сдано в набор 15.08.81. Подписано к печати 03.03.82. Т-00367. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 10,13. Тираж 150 000 экз. Заказ 826 Цена 30 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15

Отпечатано на ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области Заказ 826

30 коп.

10

БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

Вып. 1. М. П. Бронштейн. Атомы и электроны.
Вып. 2. М. Фарадей. История свечи.
Вып. 3. О. Оре. Приглашение в теорию чисел.
Вып. 4. Опыты в домашней лаборатории.
Вып. 5. И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов. Задачи по физике.
Вып. 6. Л. П. Мочалов. Головоломки.
Вып. 7. П. С. Александров. Введение в теорию групп.
Вып. 8. Г. Штейнгауз. Математический калейдоскоп.
Вып. 9. Замечательные ученые.
Вып. 10. В. М. Глушков, В. Я. Валах. Что такое ОГАС?
Вып. 11. Г. И. Копылов. Всего лишь кинематика.
Вып. 12. Я. А. Смородинский. Температура.
Вып. 13. А. Е. Карпов, Е. Я. Гик. Шахматный калейдоскоп.
Вып. 14. С. Г. Гиндикин. Рассказы о физиках и математиках.
Вып. 15. А. А. Боровой. Как регистрируют частицы.
Вып. 16. М. И. Каганов, В. М. Цукерник. Природа магнетизма.
Вып. 17. И. Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии (планиметрия).